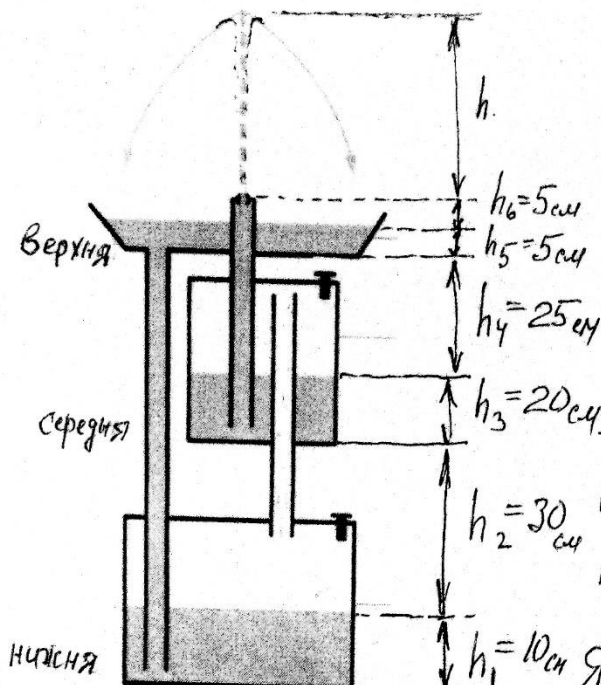


1. «Фонтан Герона». На Всеукраїнському турнірі «Юних фізиків» у 2017 році в одній із задач пропонувалося дослідити властивості стародавнього кмітливого винаходу – фонтану Герона. Модель пристрою складається з трьох посудин, розміщених одна під одною і сполучених між собою. Дві нижні посудини закриті, верхня – у формі чаші. Яка швидкість витікання води з сопла фонтану при параметрах, вказаних на рисунку? Як можна збільшити висоту струменя води в фонтані? Не враховувати в'язкість рідини та повітря.

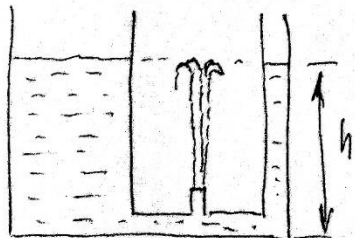


Розв'язок.

Струмінь води виходить з сопла фонтану під тиском, що утворюється в середній посудині. Цей тиск передається по трубці повітрям, що виходить з нижньої посудини при витіканні туди води з верхньої чаші.

Тиск в середній посудині дорівнює тиску в нижній і визначається різницею рівнів води у верхній чаші і нижній посудині: $p = \rho g(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)$.

Якщо не враховувати в'язкість рідини і повітря, то струмінь піднімається на висоту, що дорівнює рівню води у посудині з якої він витікає, як піднімається вода у сполучених посудинах.



Тому рівень верхівки струменя від рівня води в середній посудині дорівнює воді у чаші від рівня води у нижній посудині.

$$h + h_6 + h_5 + h_4 = h_5 + h_4 + h_3 + h_2$$

$$h = h_3 + h_2 - h_6$$

Елемент рідини масою Δm , що виходить із сопла зі швидкістю v має кінетичну енергію $E_{\text{кін}} = \frac{\Delta m v^2}{2}$. Яка у верхній точці струменя переходить у потенціальну $E_{\text{пот}} = \Delta m g h$. За законом збереження енергії

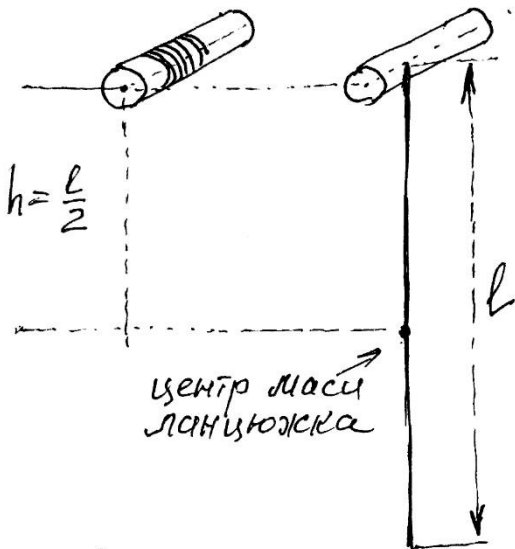
$$\frac{\Delta m \cdot v^2}{2} = \Delta m g h; \quad v = \sqrt{2g(h_3 + h_2 - h_6)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} (0,24 + 0,34 - 0,05 \text{ м})} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0,45 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Для збільшення висоти струменя треба збільшувати тиск у нижній посудині піднімаючи верхню чашу, а також піднімати середню посудину ближче до верхньої чаші.

9 клас

2. «Розкручування циліндру». На тонкостінний циліндр радіусом 20 см масою 5 кг намотано 50 обертів тонкого ланцюжку. Циліндр тонкими невагомими спицями закріплений на горизонтальній осі, яка може обертатися без тертя на нерухомих опорах. Маса 1 метра ланцюжка 100 г. Від незначного зміщення рівноваги системи порушується і ланцюжок починає розмотуватися. Якою буде частота обертання (кількість обертів за 1 с) циліндру в момент коли весь ланцюжок розмотається? Висота розташування циліндру більше довжини ланцюжка.



Довжина ланцюжка більше ніж у 300 разів перевищує радіус циліндра, тому де знаходиться на циліндрі потіток, а де кінець ланцюжка не суттєво – нехай на рівні осі циліндру. При розмотуванні ланцюжка його потенціальна енергія переходить в кінетичну ланцюжка і циліндра: $(E_{\text{пот}})_\lambda = (E_{\text{кін}})_\lambda + (E_{\text{кін}})_\text{ц}$.

$(E_{\text{кін}})_\lambda = \frac{m_\lambda v_\lambda^2}{2}$. Всі елементи маси тонкостінного (!) циліндру обертаються по колам однакового радіуса і з однаковою швидкістю $v_\text{ц}$, тому $(E_{\text{кін}})_\text{ц} = \frac{m_\text{ц} v_\text{ц}^2}{2}$. Швидкість обертання точок циліндру $v_\text{ц}$ і швидкість v_λ поступального руху ланцюжка однакові: $v_\text{ц} = v_\lambda = v$.

$$\frac{m_\text{ц} v^2}{2} + \frac{m_\lambda v^2}{2} = m_\lambda g h,$$

$$h = \frac{l}{2} = \frac{2\pi r \cdot n}{2} \text{ - зміна висоти центра маси ланцюжка.}$$

$$v = \sqrt{\frac{2m_\lambda g \cdot \frac{l}{2}}{m_\text{ц} + m_\lambda}} = \sqrt{\frac{2\pi r \cdot n \cdot m_\lambda \cdot g \cdot 2\pi r n}{m_\text{ц} + m_\lambda \cdot 2\pi r \cdot n}};$$

$$v = 2\pi r n \sqrt{\frac{m_\lambda g}{m_\text{ц} + 2\pi r n \cdot m_\lambda}}, \quad m_\lambda \text{ - маса 1 м}$$

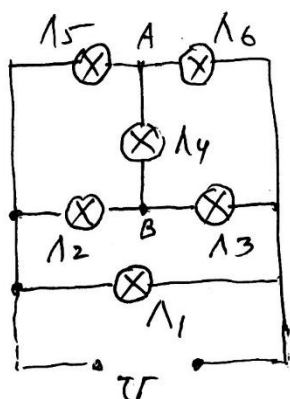
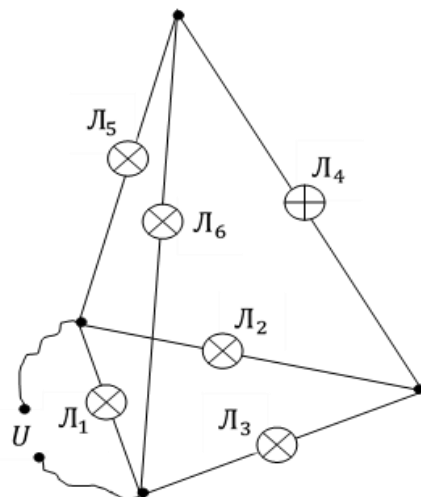
ланцюжка.

$$\text{Частота обертання циліндру } \nu = \frac{v}{2\pi r}$$

$$\nu = n \sqrt{\frac{m_\lambda g}{m_\text{ц} + 2\pi r \cdot n \cdot m_\lambda}}$$

$$\nu = 50 \sqrt{\frac{0,1 \frac{\text{кг}}{\text{м}} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{5 \text{ кг} + 2 \cdot 3,14 \cdot 0,2 \text{ м} \cdot 50 \cdot 0,1 \frac{\text{кг}}{\text{м}}}} \approx 14,7 \frac{1}{\text{с}}.$$

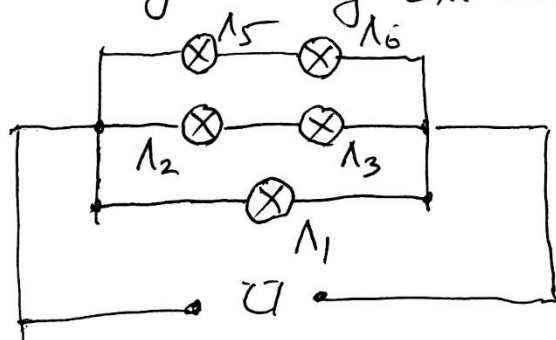
4. «Електропіраміда». Електричне коло зібрано з відрізків провідників та лампочок у вигляді пірамідки (тетраедра) – по одній лампочці на кожному ребрі. Усі лампочки однакові й мають потужність 5 Вт при напрузі 12 В. З якою потужністю буде світити кожна лампочка, якщо до будь-яких двох вершин пірамідки підключити джерело напруги 12 В?



Розв'язок.

Оскільки L_2, L_3, L_5 і L_6 мають однакові опори, то з симетричності схеми зрозуміло, що по цим лампочкам будуть проходити однакові струми і на них будуть однакові напруги:

$I_2 R = I_3 R = I_5 R = I_6 R$. Тому між точками А і В різниця потенціалів дорівнює нулю, струм проходити не буде і L_4 можна видалити із схеми:



На L_1 напруга $U = 12$ В, тому $P_1 = P_H = \frac{U^2}{R} = 5$ Вт, тобто світить з номінальною потужністю.

$$U_2 = U_3 = \frac{U}{2}; \quad U_5 = U_6 = \frac{U}{2}$$

$$P_2 = P_3 = P_5 = P_6 = \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^2}{R} = \frac{U^2}{4 \left(\frac{U^2}{P_H}\right)} = \frac{U^2 \cdot P_H}{4 U^2} = \frac{P_H}{4} = \frac{5 \text{ Вт}}{4} = 1,25 \text{ Вт}$$

Відповідь: $P_1 = 5 \text{ Вт}, P_2 = P_3 = P_5 = P_6 = 1,25 \text{ Вт}, P_4 = 0$