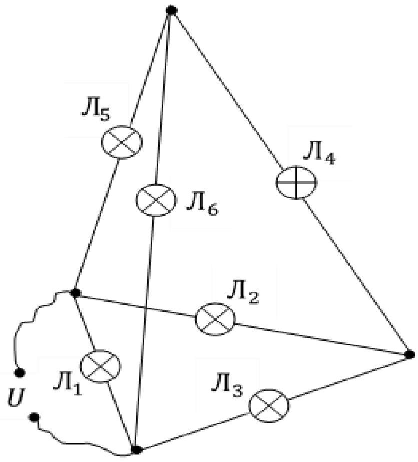
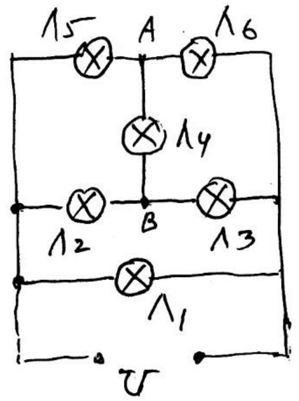
10 клас

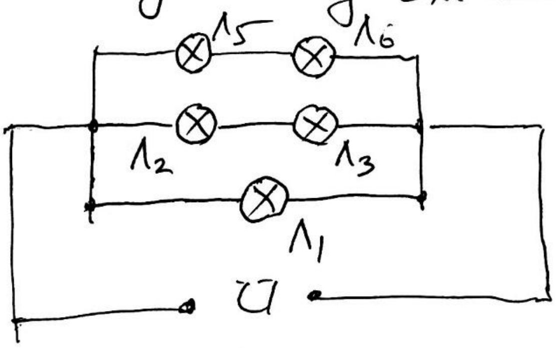
1. **«Електропіраміда».** Електричне коло зібрано з відрізків провідників та лампочок у вигляді пірамідки (тетраедра) – по одній лампочці на кожному ребрі. Усі лампочки однакові й мають потужність 5 Вт при напрузі 12 В. З якою потужністю буде світити кожна лампочка, якщо до будь-яких двох вершин пірамідки підключити джерело напруги 12 В?



Розв'язок.



Оскільки Л2, Л3, Л5 і Л6 мають однакові опори, то з симетричності схеми зрозуміло, що по цим лампочкам будуть проходити однакові струми і на них будуть однакові напруги: $I_2R = I_3R = I_5R = I_6R$. Тому між точками A і B різниця потенціалів дорівнює нулю, струм проходити не буде і Л4 можна вилучити із схеми:



На Л1 напруга $U = 12$ В, тому $P_1 = P_H = \frac{U^2}{R} = 5$ Вт, тобто світить з номінальною потужністю.

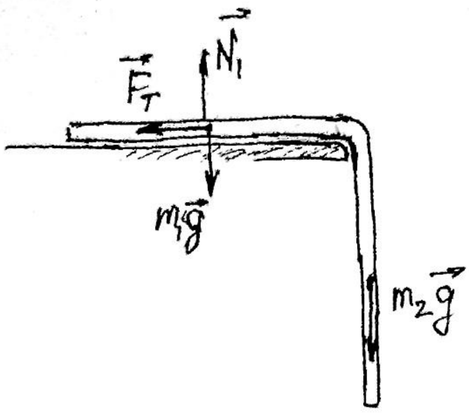
$U_2 = U_3 = \frac{U}{2}$; $U_5 = U_6 = \frac{U}{2}$

$$P_2 = P_3 = P_5 = P_6 = \frac{\left(\frac{U}{2}\right)^2}{R} = \frac{U^2}{4\left(\frac{U^2}{P_H}\right)} = \frac{U^2 \cdot P_H}{4U^2} = \frac{P_H}{4} = \frac{5\text{ Вт}}{4} = 1,25\text{ Вт}$$

Відповідь: $P_1 = 5$ Вт, $P_2 = P_3 = P_5 = P_6 = 1,25$ $P_4 = 0$

10 клас

2. **«Мотузка».** Розпрямлена мотузка лежить на горизонтальному столі перпендикулярно його краю. Частина мотузки звисає зі столу. Якщо частину, що звисає, повільно збільшити до 1/3 довжини мотузки, то мотузка почне зісковзувати зі столу. Якою буде швидкість мотузки в момент, коли вона повністю зісковзне з горизонтальної поверхні столу? Довжина мотузки менше висоти стола і дорівнює 72 см.



На мотузку діє сила тяжіння і сила тертя – на частину мотузки, яка знаходиться на поверхні стола (нехтуємо силою тертя на скругленні столу). Позначимо m_0 масу одиниці довжини мотузки. Коли сила тяжіння, що діє на звисаючу частину досягає максимального значення тертя спокою, що діє на горизонтальну частину, мотузка починає зісковзувати

$\mu m_1 g = m_2 g$; $\mu m_0 l_1 = m_0 l_2$;

$\mu \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} l$; l – довжина мотузки.

$\mu = 0{,}5$

Зміна потенціальної енергії мотузки дорівнює сумі кінетичної енергії, яку набуває мотузка і роботі проти сили тертя: $\Delta E_{пот} = E_{кін} + A_{тертя}$

Сила тертя $F_T = \mu m_0 l_1 g$ змінюється пропорційно довжині горизонтальної частини, тому її середнє значення можна знайти як середнє арифметичне $(F_T)_{ср} = \frac{F_{min} + F_{max}}{2}$

$(F_T)_{ср} = \frac{\mu \cdot m_0 \cdot \frac{2}{3} l g}{2}$, а робота $A_T = (F_T)_{ср} \cdot \frac{2}{3} l$

$A_T = \frac{1}{2} \cdot \mu m_0 \cdot \frac{2}{3} l \cdot g \cdot \frac{2}{3} l = \frac{2}{9} \mu m_0 g l^2$

$E_{пот_1} = E_{пот_2} + E_{кін} + A_T$; $m_0 \cdot \frac{2}{3} l \cdot g \cdot l + m_0 \frac{1}{3} l g \left(l - \frac{l}{6}\right) = m_0 l g \cdot \frac{l}{2} + \frac{m_0 l \cdot \upsilon^2}{2} + \frac{2}{9} \cdot \mu m_0 g l^2$ (приймаємо нульовий рівень потенціальної енергії на l нижче поверхні стола).

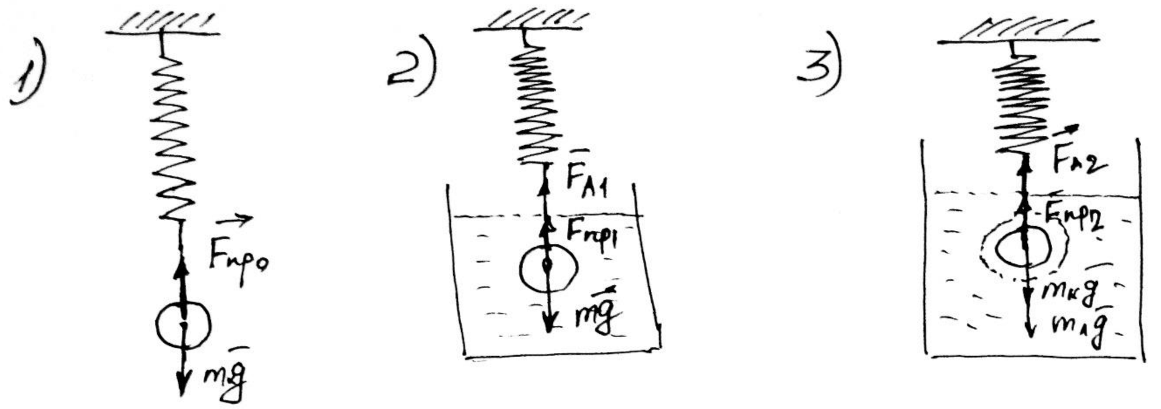
$\frac{2}{3} g l + \frac{1}{3} g \cdot \frac{5}{6} l = \frac{1}{2} g l + \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{2}{9} \cdot 0{,}5 g l$

$g l \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{18} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2} \upsilon^2$; $g l \left(\frac{12 + 5 - 9 - 2}{18}\right) = \frac{\upsilon^2}{2}$

$\frac{6}{18} g l = \frac{\upsilon^2}{2}$; $\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{2}{3} g l}}$ $\upsilon = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 9{,}8 \frac{м}{с^2} \cdot 0{,}72 м} \approx 2{,}17 \frac{м}{с}$

10 клас

3. **«Зважування температури».** Металеву кульку підвішують до пружини, яка при цьому розтягується на x_0. Потім кульку занурюють у воду, в наслідок чого розтягнення пружини стає рівним x_1. Кульку охолоджують у спеціальній камері, потім знову підвішують до тієї ж пружини і занурюють у воду, що має температуру 0° C (об'єм води значно більший об'єму кульки). Розтяг пружини поступово змінюється і стає рівним x_2. Визначте, до якої температури була охолоджена кулька. Теплообміном з оточуючим середовищем знехтувати. Густина води $\rho_в$, густина льоду $\rho_л$, питома теплоємність матеріалу кульки c, питома теплота плавлення льоду λ.



1). Кулька підвішена до пружини в повітрі:

$$m_к g = kx_0; \quad m_к = \frac{kx_0}{g} \quad (1)$$

2). Кулька занурена в воду:

$$m_к g = F_{пр1} + F_{A1}; \quad m_к g = kx_1 + \rho_в g V_к \quad (2)$$

3). Охолоджена кулька занурена в воду при 0°C.
Оскільки розтяг пружини не дорівнює розтягу в попередньому випадку, то це означає, що кулька охолоджена нижче 0°C (для помітного зменшення розтягу треба охолодити значно нижче 0°C), і на кульку намерзає лід:

$$m_к g + m_л g = kx_2 + \rho_в g(V_к - V_л) \quad (3)$$

Віднімаємо (3) від (2)

$$-m_л g = -kx_2 + kx_1 + \rho_в g V_л; \quad V_л = \frac{m_л}{\rho_л}$$

$$\frac{\rho_в}{\rho_л} m_л g - m_л g = k(x_1 - x_2)$$

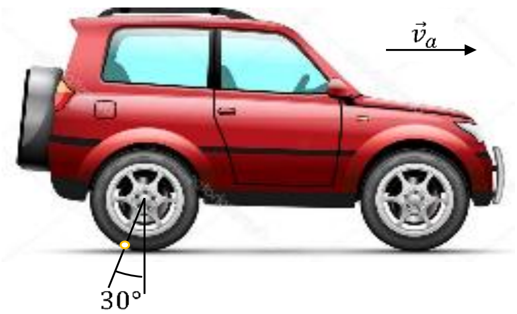
$$m_л = \frac{k(x_1 - x_2)}{\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right) g} \quad (4)$$

З рівняння теплового балансу: $m_л \lambda = m_к c \Delta T$

$\Delta T = \frac{m_л}{m_к} \cdot \frac{\lambda}{c}$. Підставляємо $m_л$ з (4) і $m_к$ з (1)

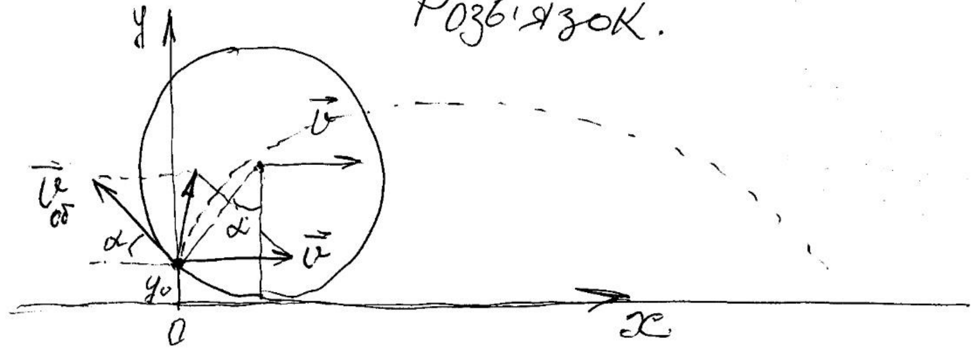
$$\Delta T = \frac{k(x_1 - x_2)}{\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right) g} \cdot \frac{g}{kx_0} \cdot \frac{\lambda}{c}, \quad \boxed{\Delta T = \frac{\lambda}{c\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} - 1\right)} \cdot \frac{x_1 - x_2}{x_0}}$$

10 клас



4. «**Небезпечний камінець».** Автомобіль рухається по горизонтальній дорозі з швидкістю 72 км/год. У протекторі шини застряв камінець, який потім злітає з шини в точці А (на малюнку – крапка білого кольору). Радіус-вектор точки А спрямований під кутом 30° до вертикалі. Визначте відстань по горизонталі до точки падіння камінця на дорогу.

Розв'язок.



Рухаючись на колесі камінець має швидкість обертового руху $\vec{v}_{об}$ по дотичній і поступального руху $\vec{v}$. $|\vec{v}_{об}| = |\vec{v}| = 20\frac{м}{с}$. Після відриву від колеса рухається з прискоренням $\vec{a} = \vec{g}$:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad \begin{cases} v_{0x} = v - v\cos\alpha \\ v_{0y} = v\sin\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_{0x}t = v(1-\cos\alpha)\cdot t \\ y = y_0 + (v\sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

, де $y_0 = R - R\cos\alpha = \approx 6{,}7 см$

В момент падіння $t_п$ координата $y = 0$:

$$y_0 + (v\sin\alpha)t_п - \frac{gt_п^2}{2} = 0$$

$$t_п = \frac{v\sin\alpha \pm \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 4\frac{g}{2}y_0}}{2\cdot\frac{g}{2}}$$

. Оскільки $t_п$ не може бути від'ємним, то задовільняє тільки один розв'язок

$$t = \frac{v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gR(1-\cos\alpha)}}{g};$$

Дальність польоту $S = x(t_п) = v(1-\cos\alpha)\cdot\frac{1}{g}\left(v\sin\alpha + \sqrt{v^2\sin^2\alpha + 2gy_0}\right)$

$$S = 20\frac{м}{с}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{10\frac{м}{с^2}}\left(20\frac{м}{с}\cdot 0{,}5 + \sqrt{\left(20\frac{м}{с}\cdot 0{,}5\right)^2 + 2\cdot 10\frac{м}{с^2}\,0{,}5\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right) \approx 5{,}377 м$$

Якщо початковою висотою y_0 знехтувати (треба обґрунтувати!), то $S = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha(1-\cos\alpha) \approx 5{,}359 м$

Максимальна висота підйому: $y_{max} = y_0 + h_{max} = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g} = y_0 + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$

$y_{max} = 6{,}7 см + 500 см = 5{,}067 м$