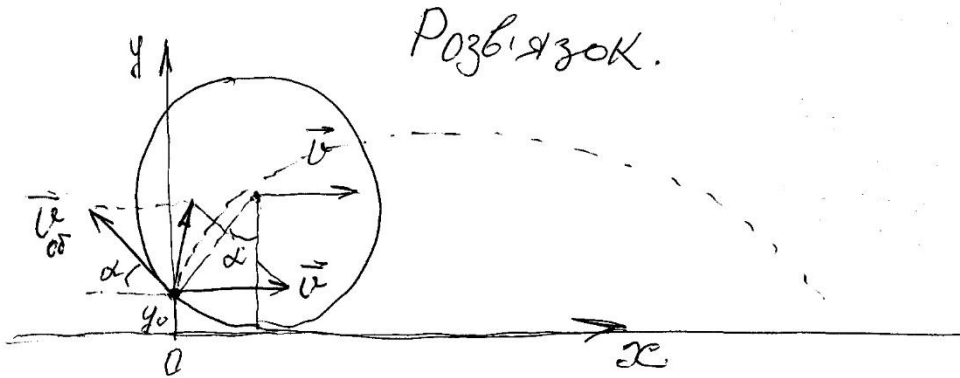


1. «Небезпечний камінець». Автомобіль рухається по горизонтальній дорозі з швидкістю 72 км/год. У протекторі шини застряв камінець, який потім злітає з шини в точці А. Радіус-вектор точки А спрямований під кутом 30° до вертикалі. Визначте відстань по горизонталі до точки падіння камінця на дорогу.



Розв'язок.

Рухаючись на колесі камінець має швидкість обертового руху \vec{v}_{os} по дотичній і поступального руху $|\vec{v}_{os}| = |\vec{v}| = 20 \frac{м}{с}$. Після відриву від колеса рухається з прискоренням $\vec{a} = \vec{g}$:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \begin{cases} v_{ox} = v - v \cos \alpha \\ v_{oy} = v \sin \alpha \end{cases} \begin{cases} x = v_{ox} t = v(1 - \cos \alpha) t \\ y = y_0 + (v \sin \alpha) t - \frac{g t^2}{2} \end{cases}, \text{ де } y_0 = R - R \cos \alpha \approx 6,7 \text{ м}$$

В момент падіння t_n координата $y = 0$:

$$y_0 + (v \sin \alpha) t_n - \frac{g t_n^2}{2} = 0$$

$$t_n = \frac{v \sin \alpha \pm \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 4 \frac{g}{2} y_0}}{2 \cdot \frac{g}{2}}. \text{ (Оскільки } t_n \text{ не може}$$

бути від'ємним, то задовільняє тільки один розв'язок

$$t = \frac{v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gR(1 - \cos \alpha)}}{g};$$

$$\text{Дальність польоту } S = x(t_n) = v(1 - \cos \alpha) \cdot \frac{1}{g} (v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2g y_0})$$

$$S = 20 \frac{м}{с} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{10 \frac{м}{с^2}} \left(20 \frac{м}{с} \cdot 0,5 + \sqrt{(20 \frac{м}{с} \cdot 0,5)^2 + 2 \cdot 10 \frac{м}{с^2} \cdot 0,5 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\right) \approx 5,377 \text{ м}$$

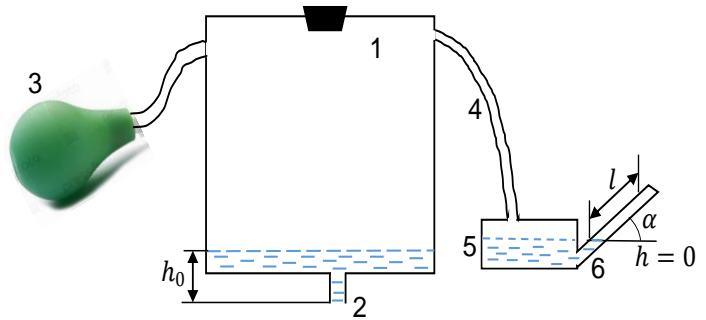
Якщо нехтувати висотою y_0 знехтувати (треба обгрунтувати!), то

$$S = \frac{2v^2}{g} \sin \alpha (1 - \cos \alpha) \approx 5,359 \text{ м}$$

$$\text{Максимальна висота підйому: } y_{\max} = y_0 + h_{\max} = y_0 + \frac{v_{oy}^2}{2g} = y_0 + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$y_{\max} = 6,7 \text{ м} + 500 \text{ см} = 5,067 \text{ м}$$

2. «Сігмамір». Для вимірювання коефіцієнту поверхневого натягу рідин учень сконструював оригінальний прилад (див. рисунок): посудина 1, що містить тонкий шар досліджуваної рідини; тонка трубка 2 у дні посудини; гумова «груша» 3, якою можна повільно збільшувати тиск повітря в посудині 1; герметично з'єднана гнучкою трубкою 4 з посудиною 5, з якої виходить похила прозора трубка 6 з відкритим верхнім кінцем. Посудина 5 та трубка 6 частково заповнені водою. Опишіть процедуру вимірювання поверхневого натягу рідини та виведіть формулу для його розрахунку. Задайте самостійно необхідні параметри приладу і рідини та оцініть мінімальну довжину трубки 6 для вимірювання цим приладом коефіцієнту поверхневого натягу до 80 мН/м.



Розв'язок. Зважаємо, що між матеріалом трубки 2 і рідиною повне змочування. На виході з трубки 2 поверхневий шар проходить і вертикальна складова сили поверхневого натягу $F_{\text{нв}} = \sigma L = \sigma \cdot \pi d$ зрівноважує силу гідростатичного тиску рідини $F_p = \rho g h_0 \cdot S = \rho g h_0 \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ (тиск повітря зверху і знизу однаковий – атмосферний):

$$(F_{\text{нв}})_y = \rho g h_0 \cdot \frac{\pi d^2}{4}; \quad \sigma \pi d \cos \varphi = \rho g h_0 \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Процедура вимірювання: 1) налити в посудину 1 тонкий шар досліджуваної рідини, 2) визначити нульовий рівень води у трубці 6, 3) закрити пробку у посудині 1, відділивши повітря в ній від атмосферного; 4) клавіш натискати на «грушу» 3 збільшувати тиск повітря в посудині 1 до моменту утворення краплі на кінці трубки 2, 4) зафіксувати максимальний рівень води у похилій трубці 6 в момент утворення краплі (змину довжини L з водою).

Формула для розрахунку σ : при збільшенні тиску повітря в посудині 1 на Δp кінцевий атмосферний тиск поверхневий шар вгинається більше, кут φ зменшується і вертикальна складова сили поверхневого натягу зростає, досягаючи максимального значення при куті $\varphi = 0$, а радіус кривизни поверхневого шару зменшується до радіуса трубки 2: $r = \frac{d}{2}$.

При подальшому збільшенні Δp поверхневий шар «продавлюється» і різко зростає кривизна. Для «критичного» значення Δp :

$$\sigma \pi d \cos 0^\circ = (\rho g h_0 + \Delta p) \frac{\pi d^2}{4}; \quad \sigma = (\rho g h_0 + \Delta p) \frac{d}{4}$$

Додатковий тиск Δp визначається за рівнем води у трубці 6 відносно нульового рівня, коли в посудинах 1 і 5 тиск був атмосферним: $\Delta p = \rho g h = \rho g L \sin \alpha$

$$\boxed{\sigma = \frac{d}{4} (\rho g h_0 + \rho g L \sin \alpha)}$$

Оцінка мінімальної довжини похилі трубки. Задаємо необхідні для розрахунку L параметри приладу: для підвищення точності вимірювання діаметр трубки 2 повинен бути як можна меншим, наприклад, $d = 0,4 \text{ мм}$; тим менше кут нахилу α , тим більшими будуть змиви довжини L в трубці 6 і точніші вимірювання, але для простоти розрахунків нехай $\alpha = 30^\circ$, рівень рідини в посудині 1 нехай $h_0 = 5 \text{ мм}$, густина рідини $\rho = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, тобто дорівнює густині води; для оціночного розрахунку $g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$:

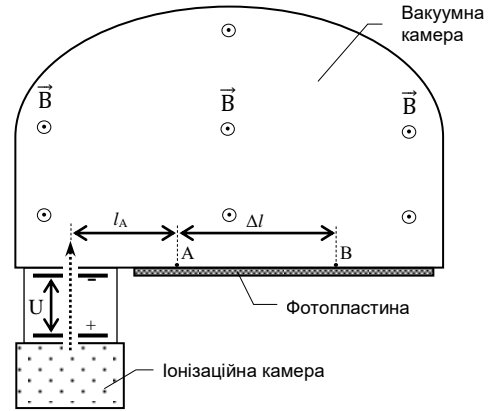
$$\sigma = \frac{d}{4} (\rho g h_0 + \rho g L \sin 30^\circ) g; \quad \frac{4\sigma}{d \cdot g} = \rho (h_0 + \frac{L}{2})$$

$$L = 2 \left(\frac{4\sigma}{\rho \cdot g \cdot d} - h_0 \right)$$

$$L = 2 \left(\frac{4 \cdot 80 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}} - 5 \cdot 10^{-3} \right) = 150 \cdot 10^{-3} = 150 \text{ мм}$$

11 клас

3. «Мас-спектрометр» Найбільш точними сучасними приладами для кількісного аналізу хімічного та ізотопного складу речовин є мас-спектрометри, основним виробником яких було НВО «Selmi» (м. Суми). Спрощений принцип дії одного з типів мас-спектрометрів такий: прискорені електричним полем з напругою U іони тонким пучком влітають перпендикулярно лініям магнітної індукції у вакуумну камеру, що знаходиться в однорідному магнітному полі; при русі в цій камері іони різних мас розподіляються в просторі й потрапляють у різні точки фотопластини, на якій утворюються лінії мас-спектру. При налаштуванні приладу досягли того, що іони гелію масою 4 а. о. м. влучають на фотопластину в точці А на відстані $l_A = 4$ см від входу іонів у вакуумну камеру. Розрахуйте, іони якої маси (в а. о. м.) попадатимуть в точку В, віддалену на $\Delta l = 6$ см від точки А? У яку точку попадатимуть ці іони, якщо прискорювальну напругу U зменшити на 36 %? Вважати, що всі іони однозарядні, тобто при іонізації атоми втрачають по одному електрону.



При проходженні в електричному полі різний потенціалів U іон набирає кінетичну енергію $E_{кін} = Ael$; $\frac{mv^2}{2} = eU$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Влітаючи в магнітне поле \vec{B} іон рухається під дією сили Лоренца $F_L = Bve \sin 90^\circ$; яка надає доцентрове прискорення $a_z = \frac{v^2}{R}$.

$$a_z = \frac{F_L}{m}; \quad \frac{v^2}{R} = \frac{Bve}{m} \quad R = \frac{mv}{Be} = \frac{m}{Be} \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$R = \sqrt{\frac{2m^2eU}{B^2me^2}}; \quad R = \sqrt{\frac{2mU}{B^2e}} - \text{радіус}$$

траєкторії по якій рухається іон масою m .
Для іонів масами m_1 і m_2 :

$$R_1 = \sqrt{\frac{2m_1U}{B^2e}}; \quad R_2 = \sqrt{\frac{2m_2U}{B^2e}} \quad (1)$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}; \quad \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}; \quad m_2 = m_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

За умовою $R_1 = l_A = 4$ см, $R_2 = l_A + \Delta l = 10$ см

$$m_2 = m_1 \left(\frac{l_A + \Delta l}{l_A}\right)^2 \quad m_2 = 4 \text{ а.о.м.} \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 25 \text{ а.о.м.}$$

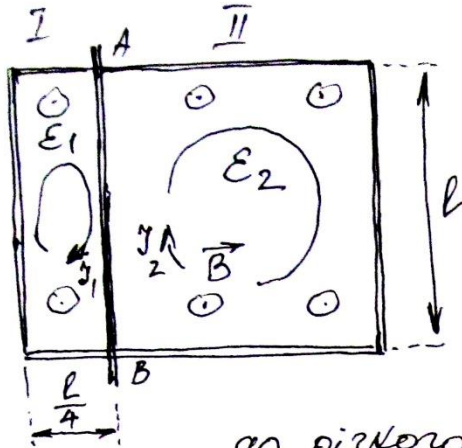
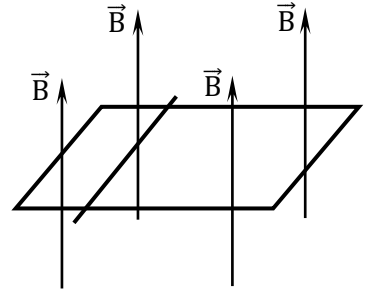
3 (1) $R_2 = \sqrt{\frac{2m_2U}{B^2e}}$, при зменшенні напруги до $U' = U - \Delta U = U - 0,36U = 0,64U$, радіус траєкторії іона m_2 стане $R_3 = \sqrt{\frac{2m_2 \cdot 0,64U}{B^2e}}$

$$\frac{R_3}{R_2} = \sqrt{\frac{0,64U}{U}} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

$$R_3 = 0,8 R_2 = 0,8 \cdot 10 \text{ см} = 8 \text{ см}$$

11 клас

4. «Перемичка» На закріпленій горизонтально тонкій квадратній рамці зі стороною 20 см лежить перемичка масою 20 г на відстані 5 см від однієї зі сторін рамки (див. рисунок). Рамка і перемичка виготовлені з неізолюваного дроту діаметром 3 мм і матеріалу, що має питомий опір $2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. В деякий момент майже миттєво включається однорідне вертикальне магнітне поле з магнітною індукцією 0,1 Тл. Яку швидкість набуває перемичка за час включення магнітного поля? Опором у точках контакту, тертям і зміщенням перемички за час включення поля знехтувати.



При включенні поля зростає магнітний потік $\Phi = BS$ через рамку і в ній виникає ЕРС індукції $|\mathcal{E}| = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|$.

ЕРС виникає в I і II контурах і створює струм у перемичці.

Різне зростання струму призводить до різкого зростання сили Ампера, яка надає їй швидкість.

ЕРС у I контурі $|\mathcal{E}_1| = \frac{\Delta B \cdot l \cdot \frac{l}{4}}{\Delta t}$ створює струм $I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} = \frac{\Delta B l^2}{4 \Delta t \cdot R_1} = \frac{\Delta B l^2}{4 \Delta t \cdot \frac{\rho}{S} (l + \frac{l}{4} + l + \frac{l}{4})} = \frac{\Delta B l^2 S}{10 \rho \Delta t}$, S - площа перерізу дроту.

Аналогічно, у контурі II, якби не було I контуру:

$$I_2 = \frac{\Delta B \cdot l \cdot \frac{3}{4}l}{\Delta t \cdot \frac{\rho}{S} (l + \frac{3}{4}l + l + \frac{3}{4}l)} = \frac{3 \Delta B l^2 S}{14 \rho \Delta t}$$

При одночасній дії ЕРС в контурах I і II у перемичці між точками А і В виникає струм $I_{AB} = I_2 - I_1 = (\frac{3}{14} - \frac{1}{10}) \frac{B l^2 S}{\rho \Delta t} = \frac{4}{35} \cdot \frac{l^2 S}{\rho} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$.

На перемичку діє сила Ампера $F_A = I_{AB} \cdot B l = \frac{4}{35} \cdot \frac{l^2 S}{\rho} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot B$.

Магнітна індукція B змінюється від 0 до $B_{\max} = 0,1 \text{ Тл}$, Тому відповідно змінюється F_A . Оскільки F_A прямопропорційна B, то $(F_A)_{\text{ср}} = \frac{F_A(0) + F_A(B_{\max})}{2} = \frac{1}{2} F_A(B_{\max}) = \frac{2}{35} \cdot \frac{l^2 S}{\rho} \cdot B_{\max} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$.

За час зростання магнітної індукції від 0 до B_{\max} ($\Delta B = B_{\max}$) «удар» сили Ампера надає перемичці імпульс:

$$m v = (F_A)_{\text{ср}} \cdot t = \frac{2}{35} \cdot \frac{l^2 S}{\rho} \cdot B_{\max} \cdot \frac{B_{\max}}{t} \cdot t = \frac{2}{35} \cdot \frac{l^2 S}{\rho} B_{\max}^2$$

тобто перемичка отримує швидкість:

$$v = \frac{2}{35} \cdot \frac{l^2 S}{\rho \cdot m} B_{\max}^2 \quad \text{або} \quad v = \frac{\pi}{70} \frac{(l \cdot d \cdot B_{\max})^2}{\rho \cdot m}$$

$$v = \frac{2}{35} \cdot \frac{(0,2 \text{ м})^2 \cdot 3,14 \cdot \frac{1}{4} (3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (0,1 \text{ Тл})^2}{2 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ кг}} \approx 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$