Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2017-2018 рік**

## **11 клас (середній рівень)**

**1.** Чи існує таке значення $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, для якого числа $\sin x$, $\cos x$ та $tg\,x$ утворюють геометричну прогресію?

**2.** Знайдіть пари натуральних чисел $x, y$, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} [x, y] + (x, y) = 2018, \\ x + y = 2018, \end{cases}$$

де через $[x, y]$ та $(x, y)$ позначені НСК та НСД чисел $x, y$.

**3.** Для яких натуральних $n$ квадрат $n \times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників $k \times 1$ та одним квадратиком $1 \times 1$, де

***а)*** $k = 4$; ***б)*** $k = 8$?

**4.** Дано нерівнобедрений $ABC$, у якого $2AC = AB + BC$. Позначимо через $I$ – центр вписаного в нього кола, $K$ – середину дуги $ABC$ описаного кола. Нехай $T$ – така точка на прямій $AC$, що $\angle TIB = 90°$. Доведіть, що пряма $TB$ дотикається до описаного кола $\Delta KBI$.

**5.** Нехай $x, y, z$ – додатні дійсні числа такі, що $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Доведіть, що $xy + yz + zx \geq 3$.

21 січня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті**
**www.matholymp.com.ua**

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2017-2018 рік**

## 11 клас (середній рівень)

**1.** Чи існує таке значення $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, для якого числа $\sin x$, $\cos x$ та $tg\, x$ утворюють геометричну прогресію?

**2.** Знайдіть пари натуральних чисел $x, y$, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} [x, y] + (x, y) = 2018, \\ x + y = 2018, \end{cases}$$

де через $[x, y]$ та $(x, y)$ позначені НСК та НСД чисел $x, y$.

**3.** Для яких натуральних $n$ квадрат $n \times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників $k \times 1$ та одним квадратиком $1 \times 1$, де

***а)*** $k = 4$; ***б)*** $k = 8$?

**4.** Дано нерівнобедрений $ABC$, у якого $2AC = AB + BC$. Позначимо через $I$ – центр вписаного в нього кола, $K$ – середину дуги $ABC$ описаного кола. Нехай $T$ – така точка на прямій $AC$, що $\angle TIB = 90°$. Доведіть, що пряма $TB$ дотикається до описаного кола $\Delta KBI$.

**5.** Нехай $x, y, z$ – додатні дійсні числа такі, що $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Доведіть, що $xy + yz + zx \geq 3$.

21 січня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті**
**www.matholymp.com.ua**