

**Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2017-2018 рік**

**9 клас (середній рівень)**

**1. Розв'яжіть систему рівнянь в натуральних числах  $x, y, z$  :**

$$\begin{cases} x^3 - 6y^2 + 27z = 132, \\ y^3 - 9z^2 + 3x = 125, \\ z^3 - 3x^2 + 12y = -68. \end{cases}$$

**2. Вчитель писав на дошці цифри 123...8123...8123... послідовно у вказаному порядку доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали в таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по 2 цифри таким чином – перші дві цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, останні дві цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 4, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?**

**3. Доведіть для додатних чисел нерівність:**

$$\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq 1.$$

**4. Знайдіть усі трійки чисел  $(x, y, p)$ , де  $x, y$  – натуральні,  $p$  – просте, що задовольняють рівність:**

$$y(x^2 + p) - x(y^2 + p) = p.$$

**5. Задане коло  $\Gamma$  з центром у точці  $O$  та діаметром  $AB$ .  $OBDE$  – квадрат,  $F$  – друга точка перетину прямої  $AD$  та кола  $\Gamma$ ,  $C$  – середина відрізка  $AF$ . Знайдіть величину кута  $OCB$ .**

21 січня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години  
Кожна задача оцінюється в 7 балів

**Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті**  
**[www.matholymp.com.ua](http://www.matholymp.com.ua)**

**9 клас (середній рівень)**

1. Розв'яжіть систему рівнянь в натуральних числах  $x, y, z$  :

$$\begin{cases} x^3 - 6y^2 + 27z = 132, \\ y^3 - 9z^2 + 3x = 125, \\ z^3 - 3x^2 + 12y = -68. \end{cases}$$

2. Вчитель писав на дошці цифри 123...8123...8123... послідовно у вказаному порядку доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали в таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по 2 цифри таким чином – перші дві цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, останні дві цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 4, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

3. Доведіть для додатних чисел нерівність:

$$\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq 1.$$

4. Знайдіть усі трійки чисел  $(x, y, p)$ , де  $x, y$  – натуральні,  $p$  – просте, що задовольняють рівність:

$$y(x^2 + p) - x(y^2 + p) = p.$$

5. Задане коло  $\Gamma$  з центром у точці  $O$  та діаметром  $AB$ .  $OBDE$  – квадрат,  $F$  – друга точка перетину прямої  $AD$  та кола  $\Gamma$ ,  $C$  – середина відрізка  $AF$ . Знайдіть величину кута  $OCB$ .

21 січня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години  
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Подальша інформація про олімпіаду буде наведена на сайті  
[www.matholymp.com.ua](http://www.matholymp.com.ua)