Розв’язки завдань III етапу Всеукраїнської олімпіади з астрономії
10 клас

1. У момент верхньої кульмінації зірки α Дракона на зенітній відстані 9°17' на північ від зеніту зоряний годинник, що йде за грінвіцьким часом, показував $7^h20^m38^s$. Екваторіальні координати α Дракона: пряме сходження $14^h03^m02^s$, схилення +64°37'. Визначити географічні координати місця спостереження.

Розв’язок

Оскільки зоря кульмінує на північ від зеніту, то $\delta>\varphi$. Її висота в верхній кульмінації

$$h_в = 90° + \varphi - \delta,$$

а зенітна відстань

$$z_в = 90° - h_в = \delta - \varphi.$$

Звідси знаходимо широту місця спостереження:

$$\varphi = \delta - z_в = 64°37' - 9°17' = 55°20'.$$

Зоряний час в місці спостереження дорівнює прямому сходженню світил, які в цей момент перебувають у верхній кульмінації. Отже,

$$s=\alpha=14^h03^m02^s.$$

Зоряний час у пункті з географічною довготою λ пов’язаний з зоряним часом на Грінвічі співввідношенням:

$$s=s_0+\lambda,$$

звідки

$$\lambda=s-s_0=14^h03^m02^s-7^h20^m38^s=6^h42^m24^s,$$

або в градусній мірі

$$\lambda=100°36'$$

2. 21 вересня 1999 року відбулося покриття Урана Місяцем. В цей день Уран знаходився у сузір’ї Козорога. Яке з двох явищ – покриття чи відкриття Урану – можна було легко спостерігати у невеликі телескопи на темному небі?

Розв’язок

21 вересня Сонце знаходиться поблизу точки осіннього рівнодення. Користуючись картою зоряного неба, можна встановити, що сузір’я Козерога, де знаходився Місяць, в цей час видиме ввечері, а кутова відстань між Сонцем та Місяцем складає близько 90°. Отже, Місяць перебував у фазі першої четверті (зростаючий).

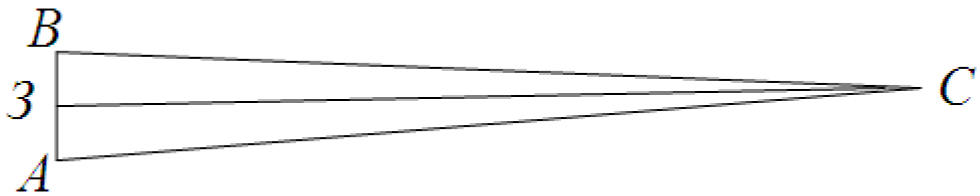
Покриття Урана Місяцем починається східною частиною супутника, яка в цей момент є темною (неосвітленою). Тому зникнення Урану за диском Місяця могло бути точно зафіксоване.

Відкриття Урану відбувалося на західній (освітленій) частині Місяця, а тому поява планети на фоні досить яскравого Місяця фіксувалося значно важче.

3. Коли Земля 4 січня знаходиться в перигелії, Сонце зміщується по небу відносно зір з кутовою швидкістю 61′ за добу, а 4 липня, коли Земля в афелії – 57′ за добу. Визначити ексцентриситет земної орбіти.

Розв’язок.

Кути зміщення Сонця по небу відносно зір такі ж, як і кути зміщення Землі по орбіті. За другим законом Кеплера, площі, описані радіус-вектором Землі за однаковий час (за добу) в перигелії і в афелії однакові. Оскільки ці кути малі, площі можна наближено представити у вигляді рівнобедрених трикутників.



На рисунку С – Сонце, З – Земля, тоді СЗ – перигелійна або афелійна відстань. Кут при вершині С (∠АСВ=α) – кут зміщення Землі по орбіті. З рівнобедреного Δ АСВ знаходимо:

$$AB = 2AЗ = 2 \cdot CЗ \cdot tg\frac{\alpha}{2}.$$

Площа трикутника АВС

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot CЗ = CЗ^2 \cdot tg\frac{\alpha}{2}.$$

Тоді для перигелію маємо:

$$S_п = q^2 \cdot tg\frac{\alpha_1}{2},$$

для афелію

$$S_а = Q^2 \cdot tg\frac{\alpha_2}{2}.$$

Прирівнюючи ці площі, занаходимо:

$$q^2 \cdot tg\frac{\alpha_1}{2} = Q^2 \cdot tg\frac{\alpha_2}{2}.$$

Виразимо перигелійну і афелійну відстані через велику піввісь орбіти і ексцентриситет:

$$q = a(1-e),$$
$$Q = a(1+e).$$

Тоді, враховуючи, що для малих кутів тангенс приблизно рівний куту (у радіанах), одержимо:

$$a^2(1-e)^2 \cdot \frac{\alpha_1}{2} = a^2(1+e)^2 \cdot \frac{\alpha_2}{2},$$

$$\frac{(1-e)^2}{(1+e)^2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$
$$\frac{1-e}{1+e} = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

Відношення кутів однакове що в радіанах, що в градусній мірі, тоді

$$\frac{1-e}{1+e} = \sqrt{\frac{57'}{61'}} \approx 0{,}967,$$
$$1 - e = 0{,}967(1 + e) = 0{,}967 + 0{,}967e,$$
$$1 - 0{,}967 = e + 0{,}967e,$$
$$0{,}033 = 1{,}967e,$$
$$e = \frac{0{,}033}{1{,}967} \approx 0{,}017$$

4. Знайти період повторення протистоянь Юпітера (середній радіус орбіти 5,20 а.о.) для марсіанського спостерігача (середній радіус орбіти Марса 1,52 а.о.) в наближенні колових орбіт.

Розв'язок

За III законом Кеплера знаходимо періоди обертання планет (порівнюючи їх з рухом Землі навколо Сонця):

$$\frac{T_З^2}{T^2} = \frac{a_З^2}{a^3},$$

звідки при $T_З$=1 рік, $a_З$=1 а.о. одержимо:

$$T_M = \sqrt{a_M^3} = \sqrt{1{,}52^3} \approx 1{,}87 \text{ року},$$
$$T_Ю = \sqrt{a_Ю^3} = \sqrt{5{,}20^3} \approx 11{,}9 \text{ року}.$$

Для спостерігача на Марсі Юпітер виступає верхньою планетою. Застосовуючи формулу синодичного періоду, для часу між двома послідовними однаковими конфігураціями Юпітера одержимо:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_M} - \frac{1}{T_Ю},$$
$$S = \frac{\mathrm{T_M T_Ю}}{\mathrm{T_Ю - T_M}} = \frac{1{,}87 \cdot 11{,}9}{11{,}9 - 1{,}87} \approx 2{,}2 \text{ роки}.$$

5. Астрофізики майбутнього проводили ремонт свого космічного корабля поблизу міжзоряного залізного сферичного астероїда з радіусом 1500 км. Під час ремонту один з дослідників загубив маленьку стальну кульку з підшипника, яка почала вільно падати на поверхню астероїда. На якій мінімальній відстані від астероїда проводились ремонтні роботи, якщо відомо, що кулька, впавши на поверхню, повністю розплавився. Відомо, що при ударі половина кінетичної енергії кульки пішла на її розігрів. Густина заліза 7,9 г/см^3, питома теплоємність заліза 500 Дж/(кг·К), питома теплота плавлення сталі 270 кДж/кг, температура плавлення 1535°С.

Розв'язок

Потенціальна енергія кульки в початковий момент

$$E_{p0} = -G\frac{mM}{R+r},$$

де m – маса кульки,
M – маса астероїда,
R – його радіус,
r – віддаль від поверхні астероїда.

Потенціальна енергія на поверхні астероїда

$$E_p = -G\frac{mM}{R}.$$

Початкова кінетична енергія кульки рівна нулю. Застосовуючи закон збереження повної механічної енергії, знаходимо кінетичну енергію кульки біля поверхні:

$$-G\frac{mM}{R+r} = -G\frac{mM}{R} + E_k,$$

$$E_k = G\frac{mM}{R} - G\frac{mM}{R+r} = GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+r}\right) = GmM\frac{r}{R(R+r)}.$$

Половина цієї енергії йде на нагрівання і плавлення кульки:

$$Q = \frac{1}{2}E_k = \frac{GmMr}{2R(R+r)}.$$

Для того, щоб повністю розплавити кульку, її потрібно нагріти від початкової температури (яку можемо прийняти рівною абсолютному нулю, оскільки астероїд міжзоряний і, отже, джерел нагрівання у вигляді зірок поруч немає) до температури плавлення $T_{пл}$=1535+273=1808 К, а потім розплавити. Для цього потрібна кількість теплоти

$$Q = cm\Delta T + m\lambda = cm(T_{пл} - 0) + m\lambda = cmT_{пл} + m\lambda,$$

де c – питома теплоємність матеріалу кульки,
λ – питома теплота плавлення.

Прирівнюючи ці кількості теплоти, одержимо:

$$\frac{GmMr}{2R(R+r)} = cmT_{пл} + m\lambda,$$

$$\frac{R+r}{r} = \frac{GM}{2R(cT_{пл}+\lambda)},$$

$$\frac{R}{r} + 1 = \frac{GM}{2R(cT_{пл}+\lambda)},$$

$$r = \frac{R}{\frac{GM}{2R(cT_{пл}+\lambda)} - 1}.$$

Маса астероїда

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3,$$

$$r = \frac{R}{\frac{G\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{2R(cT_{\text{пл}}+\lambda)} - 1} = \frac{R}{\frac{\frac{2}{3}\pi G\rho R^2}{cT_{\text{пл}}+\lambda} - 1}.$$

$$r = \frac{1{,}5\cdot 10^6}{\frac{\frac{2}{3}\cdot 3{,}14\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 7900\cdot 1{,}5^2\cdot 10^{12}}{500\cdot 1808 + 270000} - 1} \approx 1{,}35\cdot 10^5(\text{м}) = 1350(\text{км})$$

6. Подвійна система складається з двох зір однакових розмірів, температури поверхні яких відрізняються в 2 рази. Визначте амплітуду зміни зоряної величини, якщо нахил орбіти відсутній. В скільки разів при цьому змінюється блиск системи?

Розв'язок

Світність зорі L пропорційна $T^4\cdot R^2$. Оскільки розміри зір однакові, то відношення світностей таке ж, як відношення температур в четвертому степені:

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 2^4 = 16$$

Оскільки відстань від спостерігача до обох зір подвійної системи однакові, їх освітленості також відрізняються в 16 разів:

$$\frac{E_2}{E_1} = 16.$$

В максимумі блиску, коли обидва компоненти видимі, освітленість системи дорівнює сумі освітленостей компонент:

$$E_{\max}=E_1+E_2= E_1+16E_1=17E_1.$$

В мінімумі блиску темний компонент повністю закриває яскравіший, тому

$$E_{\min}=E_1,$$

а, отже, зміна блиску складає 17 разів.

Для знаходження амплітуди зоряної величини застосуємо формулу Погсона:

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = 2{,}512^{\Delta m} = 10^{0{,}4\Delta m},$$

звідки

$$\Delta m = 2{,}5lg\frac{E_{max}}{E_{min}} = 2{,}5lg17 \approx 3{,}1^m$$

7. Скільки часу пройшло від сполучення до протистояння планети, якщо її блиск за цей час збільшився на $0{,}85^m$? Орбіту вважати коловою і такою, що лежить в площині екліптики.

Розв’язок

З умови слідує, що планета верхня. Відстань від планети до Землі в сполученні

$$r_1 = R + r,$$

де R – радіус орбіти планети,
r – радіус орбіти Землі.

В протистоянні

$$r_2 = R - r.$$

Тоді для відношення освітленостей маємо:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(R+r)^2}{(R-r)^2}.$$

За формулою Погсона

$$\frac{E_2}{E_1} = 2{,}512^{\Delta m},$$

звідки

$$\frac{(R+r)^2}{(R-r)^2} = 2{,}512^{\Delta m} \approx 2{,}19,$$
$$\frac{R+r}{R-r} = \sqrt{2{,}19} \approx 1{,}48,$$
$$R + r = 1{,}48R - 1{,}48r,$$
$$2{,}48r = 0{,}48R,$$
$$R = \frac{2{,}48r}{0{,}48} \approx 5{,}2r = 5{,}2 \text{ а.о.}$$

Період обертання планети

$$T = \sqrt{R^3} = \sqrt{5{,}20^3} \approx 11{,}9 \text{ року}$$

За проміжок часу від сполучення до протистояння Земля проходить дугу, на 180° більшу ніж планета. Враховуючи, що випередження планети на кут 360° відповідає синодичному періоду, робимо висновок, що час між заданими конфігураціями складає половину синодичного періоду. Тоді

$$t = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} \cdot \frac{TT_0}{T - T_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11{,}9 \cdot 1}{11{,}9 - 1} \approx 0{,}546 \text{ року} \approx 200 \text{ діб}$$