Розв’язки завдань III етапу Всеукраїнської олімпіади з астрономії

Теоретичний тур

Завдання 1 (10, 11 клас)

Коли – влітку чи взимку – повний Місяць піднімається вище над горизонтом? Відповідь обґрунтуйте.

Розв’язок

Повний Місяць завжди знаходиться в діаметрально протилежній точці по відношенню до Сонця і спостерігається всю ніч. Максимальна його висота буде опівночі, коли Сонце в нижній кульмінації. Влітку Сонце високо над горизонтом і неглибоко під горизонтом вночі, Місяць вночі буде підніматися низько. Навпаки, взимку висота Сонця над горизонтом менша і воно глибше заходить під горизонт вночі, а, отже, повний Місяць буде над горизонтом вночі вище.

Відповідь. Взимку.

Завдання 2 (10, 11 клас)

Що триває довше на Північному полюсі – полярний день чи полярна ніч? Відповідь поясніть.

Розв’язок

Якщо розглядати Сонце як точку, то моментом початку полярного дня на Північному полюсі було б проходження Сонця через точку весняного рівнодення, а моментом закінчення – проходження через точку осіннього рівнодення. В цей період схилення центра Сонця $\delta_{\odot} > 0$, а, отже, Сонце буде на полюсі світилом, що не заходить (оскільки при цьому $\delta_{\odot} > 90° - \varphi$). Цьому проміжку часу відповідає половина великого кола екліптики.

Однак днем ми називаємо період, коли над горизонтом видимою є хоча б частина сонячного диска, а не його центр. Тому Сонце сходить раніше і заходить пізніше, ніж центр сонячного диску з’являється над горизонтом чи ховається під горизонт. За рахунок цього тривалість полярного дня буде більшою. Крім цього, атмосферна рефракція за рахунок заломлення променів у атмосфері збільшує видиму висоту світила, а, отже, момент сходу Сонця спостерігається раніше, а момент заходу пізніше, ніж край диска знаходитиметься на горизонті. Ці причини призводять до збільшення тривалості полярного дня порівняно з полярною ніччю на обох полюсах.

На Північному полюсі полярний день триває більше ще з однієї причини. За рахунок еліптичності орбіти влітку Земля знаходиться найдалі від Сонця (в афелії). У відповідності з другим законом Кеплера вона рухається в цей час повільніше, ніж взимку поблизу перигелію. Отже, і Сонце по екліптиці в цей час рухається повільніше. Тому половину екліптики від точки весняного рівнодення до точки осіннього воно проходить за більший час, ніж іншу її половину, а полярний день буде

більшим за полярну ніч. (На Північному полюсі тривалість полярного дня складає близько 186 діб)

Відповідь. Полярний день.

Завдання 3 (10, 11 клас)

Штучний супутник Землі обертається навколо планети по еліптичній орбіті. В точці перигею його швидкість дорівнює другій космічній швидкості для точки апогею. Знайти ексцентриситет орбіти супутника.

Розв'язок

Запишемо апогейну відстань через ексцентриситет орбіти *e* і велику піввісь орбіти:

$$Q = a(1+e)$$

Друга космічна швидкість для точки апогею (на відстані Q від центра Землі) може бути обчислена за формулою:

$$v_{IIQ} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{Q}} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{a(1+e)}}.$$

За умовою, таку швидкість супутник має в точці перигею: $v_q = v_{IIQ}$. Враховуючи, що швидкість в перигеї дорівнює $v_q = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}(1+e)}{a(1-e)}}$, одержимо:

$$\sqrt{\frac{GM_{\oplus}(1+e)}{a(1-e)}} = \sqrt{\frac{2GM_{\oplus}}{a(1+e)}}$$

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{2}{1+e}}$$

$$\frac{1+e}{1-e} = \frac{2}{1+e}$$

$$(1+e)^2 = 2 - 2e$$

$$1 + 2e + e^2 = 2 - 2e$$

$$e^2 + 4e - 1 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20$$

$$e_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

Відкидаючи від'ємний корінь, знаходимо: $e = -2 + \sqrt{5} \approx 0{,}24$.

Відповідь. $e = 0{,}24$.

Завдання 4 (10, 11 клас)

Скільки часу пройшло від сполучення до протистояння планети, якщо її блиск для земного спостерігача за цей час збільшився на $0{,}85^m$? Орбіту планети вважати коловою і такою, що лежить в площині екліптики.

Розв’язок

Відстань від Землі до планети у сполученні $r_1=a+a_0$, у протистоянні $r_2=a-a_0$. Відношення потоків світла від планети

$$\frac{E_2}{E_1}=\frac{r_1^2}{r_2^2}=2{,}512^{(m_1-m_2)}=2{,}512^{\Delta m}$$

$$\frac{(a+a_0)^2}{(a-a_0)^2}=2{,}512^{\Delta m}$$

$$\frac{a+a_0}{a-a_0}=2{,}512^{\frac{\Delta m}{2}}$$

Звідки $a+a_0=2{,}512^{\frac{\Delta m}{2}}(a-a_0)$,

$a_0(1+2{,}512^{\frac{\Delta m}{2}})=(2{,}512^{\frac{\Delta m}{2}}-1)a$,

$a=a_0\frac{2{,}512^{\frac{\Delta m}{2}}+1}{2{,}512^{\frac{\Delta m}{2}}-1}$.

За третім законом Кеплера знаходимо сидеричний період обертання планети: $\frac{T^2}{T_0^2}=\frac{a^3}{a_0^3}$.

Звідки $T=T_0\sqrt{\left(\frac{a}{a_0}\right)^3}=T_0\sqrt{\left(\frac{2{,}512^{\frac{\Delta m}{2}}+1}{2{,}512^{\frac{\Delta m}{2}}-1}\right)^3}\approx 11{,}77T_0$.

Проміжок часу t від сполучення до протистояння складає половину синодичного періоду обертання, тоді

$\frac{1}{S}=\frac{1}{2t}=\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}=\frac{T-T_0}{TT_0}$.

Приймаючи T_0=1 рік, одержимо:

$$t=\frac{TT_0}{2(T-T_0)}=\frac{11{,}77\cdot 1}{2\cdot(11{,}77-1)}\approx 0{,}546\text{ року}\approx 200\text{ діб}$$

Відповідь. 200 діб.

Завдання 5 (10, 11 клас)

У сузір'ї Оріона, на відстані 120 світлових років від нас, земні астрономи виявили зірку, за всіма параметрами аналогічну Сонцю. Цивілізація "зелених чоловічків", що живе на одній з планет, яка обертається довкола тієї зірки, також зацікавилася нашим Сонцем. Вимірювання паралакса нашого Сонця, виконані астрономами тієї цивілізації (згідно з їх класичними правилами вимірювання паралакса), дали результат 0,039". Знайти тривалість року у зелених чоловічків.

Розв’язок

Паралакс Сонця, визначений зеленими чоловічками, пов’язаний з відстанню (у парсеках) від Сонця до їх зорі класичним співвідношенням:

$r = \frac{a}{\pi}$, де a – велика піввісь орбіти планети (а.о.), π – паралактичний кут (у кутових секундах).

Звідси велика піввісь орбіти планети «зелених чоловічків» дорівнює $a = r\pi$. Оскільки 1 пс=3,26 св. року, відстань до зорі $r = \frac{120}{3{,}26} \approx 36{,}8$ пс.

Тоді $a = 36{,}8 \cdot 0{,}039 \approx 1{,}44$ а. о.

Використовуючи узагальнений третій закон Кеплера для руху Землі навколо Сонця і планети «зелених чоловічків» навколо їх зірки, одержимо: $\frac{T_0^2 M_\odot}{a_0^3} = \frac{4\pi^2}{G} = \frac{T^2 M}{a^3}$, де $M_\odot$ – маса Сонця, M – маса зорі.

Оскільки за умовою зоря за всіма параметрами аналогічна Сонцю, її маса M=$M_\odot$. Тоді для сидеричного періоду обертання планети «зелених чоловічків» маємо: $\frac{T_0^2}{a_0^3} = \frac{T^2}{a^3}$,

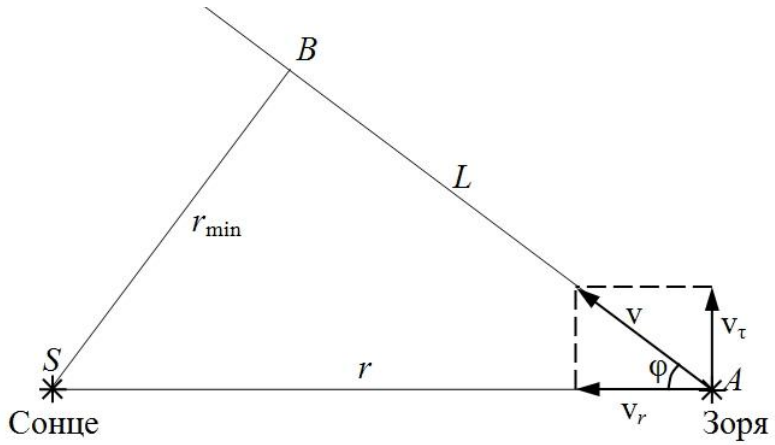
$$T = T_0\sqrt{\frac{a^3}{a_0^3}} = 1 \text{ рік} \cdot \sqrt{\frac{1{,}44^3}{1^3}} \approx 1{,}72 \text{ року}$$

Відповідь. Тривалість року у «зелених чоловічків» 1,72 року.

Завдання 6 (10, 11 клас)

«Летюча зірка Барнарда» має рекордно великий власний рух (10,4" на рік). Променева швидкість зорі –106,8 км/с. Паралакс зірки дорівнює 0,55", її видима зоряна величина $9{,}6^m$. Визначте час, через який зоря буде найближче до Сонця, та її зоряну величину у цей момент.

Розв’язок



За власним рухом зорі μ за рік та паралаксом π знаходимо складову швидкості поперек променя зору (тангенціальну швидкість):

$$v_\tau = 4{,}74\frac{\mu}{\pi}\frac{\text{км}}{\text{с}} = 4{,}74 \cdot \frac{10{,}4}{0{,}55}\frac{\text{км}}{\text{с}} \approx 89{,}6\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Повна швидкість зорі в просторі може бути визначена за двома її взаємно перпендикулярними складовими v_τ та v_r:

$$v = \sqrt{v_\tau^2 + v_r^2} = \sqrt{89{,}6^2 + (-106{,}8)^2} \approx 139{,}4\frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

З векторного трикутника знаходимо кут, який утворює з напрямком на зорю її швидкість: $sin\varphi = \frac{v_\tau}{v}$, $cos\varphi = \frac{v_r}{v}$.

Щоб знайти положення зорі в момент, коли вона найближче (точка B), опускаємо перпендикуляр з точки S на напрямок, вздовж якого рухається зоря.

Відстань до зорі зараз $r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}55} \approx 1{,}82$ пс.

З прямокутного трикутника SAB знаходимо:

мінімальну відстань до зорі: $r_{min} = SB = r \cdot sin\varphi = r \cdot \frac{v_\tau}{v} = 1{,}82 \cdot \frac{89{,}6}{139{,}4} \approx 1{,}17$ пс;

відстань, яку пройде зоря до моменту зближення: $L = AB = r \cdot cos\varphi = r \cdot \frac{|v_r|}{v}$.

Час руху зорі до моменту найбільшого зближення:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{r|v_r|}{v^2} = 1{,}82 \cdot 3{,}08 \cdot 10^{13}\text{км} \cdot \frac{106{,}8\frac{\text{км}}{\text{с}}}{\frac{139{,}4^2\text{км}^2}{\text{с}^2}} \approx 3{,}08 \cdot 10^{11}\ \text{с} \approx 9{,}8\ \text{тис. років}$$

Освітленість, створювана зорею на Землі, при цьому зміниться в $\frac{E}{E_0} = \frac{r^2}{r_{min}^2}$ раз. За формулою Погсона

$$m_{max} - m = -2{,}5lg\frac{E}{E_0} = -2{,}5lg\frac{r^2}{r_{min}^2} = -5lg\frac{r}{r_{min}},$$

$$m_{max} = m - 5lg\frac{r}{r_{min}} = 9{,}6^m - 5lg\frac{1{,}82}{1{,}17} \approx 8{,}6^m.$$

Відповідь. Зоря буде найближче до Сонця через 9,8 тис. років, її зоряна величина складатиме $8{,}6^m$.

Завдання 7 (10, 11 клас)

Визначити тривалість доби на планеті, радіус якої удвічі менший за радіус Землі, маса у вісім разів менша за масу Землі, а пружинні ваги на екваторі показують вагу на 1% меншу, ніж на полюсі.

Розв’язок

Для знаходження тривалості доби на планеті (тобто періоду обертання навколо власної осі) $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (ω – кутова швидкість обертання планети), запишемо другий закон Ньютона для тіла масою *m*, що знаходиться на екваторі планети. За умовою, рівнодійна сили тяжіння та реакції опори (величина останньої і є вага) складає на екваторі 1% або 0,01 від сили тяжіння на полюсі (де немає нормального прискорення і ця рівнодійна дорівнює нулю). Ця рівнодійна надає тілу доцентрового прискорення в процесі руху по колу при обертанні планети:

$$ma_{\text{доц}} = F_{\text{т}} - N = 0.01F_{\text{т}},$$

$$m\omega^2 R = 0{,}01 \cdot G\frac{M_x m}{R^2} = 0{,}01 \cdot G\frac{M_З m}{8\cdot\left(\frac{R_З}{2}\right)^2} = 0{,}01 \cdot G\frac{M_З m}{2R_З^2} = \frac{1}{2}0{,}01 \cdot mg_З.$$

Звідки $\omega^2 = \frac{0{,}01\cdot g_З}{2R} = \frac{0{,}01\cdot g_З}{2\cdot\left(\frac{R_З}{2}\right)} = \frac{0{,}01\cdot g_З}{R_З}$.

У рівняннях $M_З$ – маса Землі, G – гравітаційна стала, $R = R_З/2$ – радіус планети. З кутової швидкості обертання знаходимо її період:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_3}{0{,}01 \cdot g_3}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}37 \cdot 10^6\text{м}}{0{,}01 \cdot 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}} \approx 50600\text{ с} \approx 14\text{ год} \approx$$
$$\approx 0{,}59\text{ земн. доби}$$

Відповідь. 0,59 земної доби.

Завдання 8 (10 клас)

Внутрішня планета А і зовнішня планета В при спостереженні із Землі мають однаковий синодичний період S. Чому дорівнює синодичний період планети А при спостереженні з планети В?

Розв'язок

Позначимо періоди обертання Землі і планет А, В навколо Сонця через T, T_A і T_B відповідно. Запишемо вирази для синодичного періоду кожної з планет:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T},$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_B}.$$

Додавши ці рівності, одержимо:

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T} + \frac{1}{T} - \frac{1}{T_B},$$

$$\frac{2}{S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}.$$

Права частина цієї рівності дає синодичний період планети А при спостереженні з B: $\frac{1}{S_{AB}} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}$. Звідси слідує, що $S_{AB} = \frac{S}{2}$.

Відповідь. Синодичний період планети А при спостереженні з планети В складає S/2.

Завдання 8 (11 клас)

Подвійна зоря складається з блакитної зорі з температурою поверхні 30 000 К і блиском 0^m та червоної зорі з температурою 3 000К і блиском 5^m. Як відносяться радіуси цих зір?

Розв'язок

Позначимо T_1=30 000К – температура першої зорі, T_2=3 000К – температура другої. Оскільки за умовою задачі зорі утворюють єдину гравітаційну систему, вони знаходяться від земного спостерігача практично на однаковій віддалі, а, значить, їх світності пропорційні видимим блискам:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{E_1}{E_2}.$$

З формули Погсона знаходимо: $\frac{E_1}{E_2} = 2{,}512^{m_2 - m_1} = 2{,}512^{5-0} = 100$, (такий же результат можна отримати, згадавши, що різниці в 5 зоряних

величин відповідає зміна освітленості в 100 разів). Отже, і для світностей зір маємо $\frac{L_1}{L_2} = 100$.

Світність пов'язана з температурою та радіусом зорі співвідношенням: $L = \sigma T^4 S = 4\pi R^2 \sigma T^4$, де $S = 4\pi R^2$ – площа поверхні зорі, $\varepsilon = \sigma T^4$– потужність, що випромінюється з одиниці поверхні зорі (закон Стефана–Больцмана, зорю вважаємо чорним тілом).

Тоді $\frac{L_1}{L_2} = \frac{4\pi R_1^2 \sigma T_1^4}{4\pi R_2^2 \sigma T_2^4} = \frac{R_1^2 T_1^4}{R_2^2 T_2^4}$,

$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{L_1 T_2^4}{L_2 T_1^4}$,

$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{L_1 T_2^4}{L_2 T_1^4}} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \left(\frac{3000}{30000}\right)^2 \cdot \sqrt{100} = \frac{1}{100} \cdot 10 = \frac{1}{10}$.

Тобто радіус другої зорі в 10 разів більший.

Відповідь. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{10}$.