Розв’язки завдань III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії
10 клас

1. 21 березня в справжній полудень довжина тіні від вертикально розташованого стовпа дорівнювала висоті стовпа. Визначити широту місця спостереження.

Розв’язок

21 березня – день весняного рівнодення. Сонця в цей день проходить точку весняного рівнодення, яка є точкою перетину екліптики та небесного екватора. Його схилення в цей день дорівнює нулю: $\delta=0$. Тоді висота Сонця в верхній кульмінації (в справжній полудень)

$h=90°-\varphi+\delta=90°-\varphi$.

Оскільки довжина тіні стовпа дорівнює його висоті, то кутова висота Сонця в цей момент $h=45°$. Отже,

$\varphi=90°-h=90°-45°=45°$.

2. З якої планети Сонячної системи можна побачити неозброєним оком супутники двох сусідніх планет? Відповідь обґрунтуйте.

Розв’язок

У планети повинно бути дві сусідні планети. Тому Меркурій та Нептун виключаються. Крім того, у сусідніх планет повинні бути супутники. Отже, це не Венера (бо у Меркурія супутників немає) і не Земля (у Венери теж немає супутників).

Для спостереження неозброєним оком супутник повинен бути досить великим. Тому як супутники-претенденти розглядаємо Місяць, Галілеєві супутники Юпітера, супутник Сатурна Титан і Нептуна Тритон. Супутники Марса з Юпітера побачити не можна (оскільки їх не видно і з Землі, яка ближче до Марса), в Урана досить великих супутників немає. Тому Юпітер (сусідні Марс і Сатурн) та Сатурн (сусідні планети Юпітер та Уран) також виключаються.

Залишається дві планети: Марс і Уран.

Чим ближче планета до Сонця, тим яскравіші її супутники. Радіуси орбіт планет із збільшенням порядкового номера планети дуже швидко ростуть, тому й мінімальні відстані між сусідніми планетами теж збільшуються з віддаленням від Сонця. Крім того, Тритон – найменший серед великих супутників, і побачити його з Урана було б складно. Отже, шуканою планетою є Марс, з якого неозброєним оком видно Місяць біля Землі та Галілеєві супутники Юпітера.

3. У подвійної зірки річний паралакс становить 0,05", велика піввісь видимої орбіти дорівнює 2,0", а період обертання компонентів 100 років. Знайдіть суму мас зірок і масу кожної зірки, якщо зірки знаходяться від центру мас на відстанях, які відносяться як 4:1.

Розв’язок

За річним паралаксом знаходимо відстань до зірки:

$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}05''} = 20 \text{ пк} = 20 \cdot 206265 \text{ а.о.}$.

Знаючи відстань та кутовий розмір великої півосі, знаходимо її лінійний розмір:

$a = r \cdot \alpha = 20 \cdot 206265 \text{а.о.} \cdot \frac{2''}{206265''} = 40 \text{ а.о.}$

Для знаходження суми мас зірок використовуємо узагальнений третій закон Кеплера, порівнюючи рух зірок навколо спільного центру мас з рухом Землі навколо Сонця:

$\frac{T^2(M_1+M_2)}{a^3} = \frac{T_0^2(M_\odot+M_\oplus)}{a_0^3}$,

звідки, нехтуючи масою Землі порівняно з масою Сонця і враховуючи параметри руху Землі (a_0=1 а.о., T_0=1 рік), знаходимо:

$M_1 + M_2 = \frac{T_0^2 a^3}{T^2 a_0^3} M_\odot = \frac{1^2 \cdot 40^3}{100^2 \cdot 1^3} M_\odot = 6{,}4 M_\odot$.

Відношення відстаней зірок від центру мас обернено пропорційне їх масам:

$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{4}$,

звідки

$M_2 = 4M_1$,

$M_1 + M_2 = M_1 + 4M_1 = 5M_1 = 6{,}4M_\odot$,

$M_1 = \frac{6{,}4}{5} M_\odot = 1{,}28 M_\odot$,

$M_2 = 4M_1 = 4 \cdot 1{,}28 M_\odot = 5{,}12 M_\odot$.

4. Паралакс Веги дорівнює 0,12", а зоряна величина 0^m. На якій відстані від Сонця поблизу прямої Сонце–Вега повинен знаходитись спостерігач, щоб ці дві зірки були для нього однаково яскравими? Видима зоряна величина Сонця дорівнює $-26{,}8^m$.

Розв’язок

За річним паралаксом знаходимо відстань до Веги:

$r = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{0{,}12''} \approx 8{,}3 \text{ пк}$.

Якщо спостерігач знаходиться на прямій Сонце–Вега на відстані r_1 від Сонця, то відстань від нього до Веги складатиме $r_2=r-r_1$. Якщо зорі однаково яскраві, то видимі зоряні величини їх будуть однакові.

Видима зоряна величина Сонця для спостерігача на Землі маємо:

$m_\odot = M_\odot - 5 + 5 \lg a_0$,

де $M_\odot$ – абсолютна зоряна величина Сонця,

$a_0 = 1 \text{ а.о.} = \frac{1}{206256}$ пк – відстань від Землі до Сонця.

Для спостерігача на відстані r_1 від Сонця

$m_{\odot 1} = M_\odot - 5 + 5 \lg r_1$.

Віднімаючи попередню рівність, одержимо:

$m_{\odot 1} - m_\odot = M_\odot - 5 + 5 \lg r_1 - M_\odot + 5 + 5 \lg a_0 = 5(\lg r_1 - \lg a_0)$,

$m_{\odot 1} = m_\odot + 5(\lg r_1 - \lg a_0) = m_\odot + 5 \lg \frac{r_1}{a_0}$.

Аналогічно для Веги при спостереженні з Землі
$m = M - 5 + 5\lg r$,
з точки на відстані r_1 від Сонця
$m_1 = M - 5 + 5\lg r_2 = M - 5 + 5\lg(r - r_1)$,
звідки
$m_1 = m + 5\lg(r - r_1) - 5\lg r = m + 5\lg\frac{r-r_1}{r}$.
Тоді для розглянутої точки
$m_\odot + 5\lg\frac{r_1}{a_0} = m + 5\lg\frac{r-r_1}{r}$,
$m - m_\odot = 5\lg\frac{r_1}{a_0} - 5\lg\frac{r-r_1}{r} = 5\left(\lg\frac{r_1}{a_0} - \lg\frac{r-r_1}{r}\right) = 5\lg\left(\frac{r_1}{a_0}\cdot\frac{r}{r-r_1}\right)$,
$\lg\left(\frac{r_1}{a_0}\cdot\frac{r}{r-r_1}\right) = \frac{m-m_\odot}{5}$,
$\frac{r_1}{a_0}\cdot\frac{r}{r-r_1} = 10^{\frac{m-m_\odot}{5}}$,
$\frac{r_1}{r-r_1}\cdot\frac{r}{a_0} = 10^{\frac{m-m_\odot}{5}}$.
$\frac{r_1}{8{,}3-r_1}\cdot\frac{8{,}3}{\frac{1}{206265}} = 10^{\frac{0-(-26{,}8)}{5}}$,
$\frac{r_1}{8{,}3-r_1}\cdot 8{,}3\cdot 206265 = 10^{5{,}36}$,
$\frac{r_1}{8{,}3-r_1} = \frac{10^{5{,}36}}{8{,}3\cdot 206265} = 0{,}134$,
$r_1 = 1{,}11 - 0{,}134r_1$,
$1{,}134r_1 = 1{,}11$,
$r_1 = \frac{1{,}11}{1{,}134} \approx 0{,}98$ пк.

5. Проникна сила телескопа 19^m. Чи можна з його допомогою зареєструвати кульове скупчення із мільйона зір подібних Сонцю, що знаходяться в сусідній галактиці на відстані 10 Мпк?

Розв'язок.
За формулою Погсона
$lg\frac{E_c}{E_\odot} = 0{,}4(M_\odot - M_c)$,
де E_c, M_c – блиск і абсолютна зоряна величина скупчення,
$E_\odot$, $M_\odot$ – те ж для Сонця.
Світність скупчення
$E_c = 10^6 E_\odot$.
Абсолютна зоряна величина Сонця $M_\odot \approx 5^m$, тоді
$M_\odot - M_c = 2{,}5lg\frac{E_c}{E_\odot}$,
$M_c = M_\odot - 2{,}5lg\frac{E_c}{E_\odot} = 5 - 2{,}5lg\ 10^6 = 5 - 15 = -10^m$.
Зв'язок видимої і абсолютної зоряних величин скупчення:
$M_c = m + 5 - 5\lg r$,
де r – відстань до скупчення в парсеках. Звідси
$m = M_c - 5 + 5\lg r = -10 - 5 + 5\lg 10^7 = 20^m$,
отже, скупчення в телескоп не видно.

6. Оцінити масу атмосфери Венери, якщо тиск на її поверхні $1{,}0\cdot10^7$ Па, радіус планети 6052 км, середня густина речовини планети 5,2 г/см^3.

Розв'язок

Вважаємо, що висота атмосфери мала порівняно з радіусом планети і прискорення вільного падіння не змінюється в об'ємі атмосфери. Тоді тиск стовпа атмосфери висотою h

$$p = \rho_a g h,$$

де $g = G\frac{M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\rho}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G R\rho$ – прискорення вільного падіння на поверхні Венери,

$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ – маса планети.

Звідси

$$\rho_a = \frac{p}{gh} = \frac{p}{\frac{4}{3}\pi G R\rho h} = \frac{3p}{4\pi G R\rho h}.$$

Об'єм атмосфери (за умови $h<<R$)

$$V_a = 4\pi R^2 h,$$

тоді її маса

$$m = \rho_a V_a = \frac{3p}{4\pi G R\rho h}\cdot 4\pi R^2 h = \frac{3pR}{G\rho}.$$

$$m = \frac{3\cdot1{,}0\cdot10^7\cdot6{,}052\cdot10^6}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}2\cdot10^3} \approx 5{,}23\cdot10^{20} \text{ кг.}$$