Розв'язки завдань II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з фізики
11 клас

Задача 1

Під час польоту літака за нормальних умов на невеликій висоті над землею повітря всмокчується до турбореактивного двигуна через повітрозабірники площею $S = 1\text{м}^2$. У камері згорання повітря підтримує процес згорання рідкого полива (гасу). 12000 кг палива вистачає на 3 год 30 хв. роботи двигуна, який створює силу тяги 170 кН.

Визначте швидкість витоку газів із сопел двигуна в режимі польоту зі сталою швидкістю v =900 км/год.

За нормальних умов густина повітря $\rho = 1{,}3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Розв'язок

Швидкість витоку газів розрахуємо із II закону Ньютона у вигляді $\Delta p = Ft$, де Δp – зміна імпульсу газів, що витікають із сопел двигуна в режимі польоту.

За $t = 1$ с імпульс газів змінюється на величину $\Delta p = Mu$, де u – швидкість витоку газів, M – їх маса.

Отже, $Mu = Ft$ (1).

Із сопла витікають гази, які утворилися під час згорання рідкого палива, та залишку повітря: $M = \Delta m + \rho V = \frac{m}{t} + \rho V$, де Δm – витрати пального за 1 секунду, V – об'єм повітря, яке всмокталося через повітрозабірники, за одну секунду.

За 1 секунду літак долає відстань $L = vt$, тому об'єм повітря, що прокачується під час польоту на дану відстань, дорівнює $V = SL = Svt$.

Отже, $M = \frac{m}{t} + \rho Svt$ (2).

Підставимо вираз (2) у (1): $(\frac{m}{t} + \rho Svt)u = Ft$.

Звідси $u = \frac{Ft}{\frac{m}{t}+\rho VSvt}$;

$$u = \frac{170\ 000\ \text{Н}\cdot 1\text{с}}{\frac{12000\ \text{кг}}{3\ \text{год}\ 30\ \text{хв}} + 1{,}3\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot 1\text{м}^2\cdot 900\ \frac{\text{км}}{\text{год}}\cdot 1\text{с}} = 527{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 2

Для колонізації планет учені пропонують використовувати повітряні міста у вигляді плівкових оболонок. Оцініть вантажопідйомність повітряного міста (у кг на 1 м^2 площі) на Венері, яке має вигляд диску діаметром декілька кілометрів і висотою 200 м. У такому місті будуть жити люди, дихаючи тим самим повітрям, що й на Землі за атмосферного тиску 0,1 МПа і температури 30°С. Плівка має поверхневу густину $\sigma = 80\ \frac{\text{г}}{\text{м}^2}$. Прискорення вільного падіння на поверхні

Венери становить 0,9 від земного. Молярна маса карбону 12 $\frac{\text{г}}{\text{моль}}$, оксигену – 16 $\frac{\text{г}}{\text{моль}}$, нітрогену – 14 $\frac{\text{г}}{\text{моль}}$.

Планета	Тиск біля поверхні планети	Температура біля поверхні планети	Склад атмосфери
Венера	9,2 МПа	462°C.	96,5 % CO_2, 3,5% N_2
Земля	0,1 МПа	15°C.	78% N_2, 22% O_2,

Розв'язок

Уважатимемо, що вантажопідйомність – це маса вантажу, який можна розмістити в місті-оболонці, щоб оболонка плавала біля поверхні планети. За умовою задачі вантажопідйомність необхідно оцінити як масу людей та вантажу на 1 м^2 площі оболонки.

Щоб оболонка міста плавала біля поверхні Венери, необхідно, щоб урівноважувалися сили, що на нього діють:

$$F_A = (m_{\text{вант}} + m_{\text{пов}} + m_{\text{о}})g_{\text{В}} \ (1),$$

де $g_{\text{В}} = 0{,}9g_{\text{З}}$ – прискорення вільного падіння на Венері ($g_{\text{З}} = 9{,}8\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ прискорення вільного падіння на Землі); $m_{\text{о}}$ – маса оболонки, $m_{\text{пов}}$ – маса повітря в місті, $m_{\text{вант}}$ – маса людей та вантажу, F_A – сила Архімеда.

Маса оболонки:

$$m_{\text{о}} = \sigma S = \sigma(2 \cdot \pi r^2 + h \cdot 2\pi r) = \sigma \cdot 2\pi r^2(1 + \frac{h}{r}).$$

За умовою задачі діаметр міста – декілька кілометрів, тому $\frac{h}{r}$ щонайменше в 10 разів менше за одиницю. Отже, масою стінки оболонки можна знехтувати. Тоді $m_{\text{о}} = \sigma \cdot 2\pi r^2$ (2).

Оцінимо масу атмосфери в місті, використовуючи рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$P_{\text{З}}V_M = \frac{m_{\text{пов}}}{M_{\text{пов}}}RT_{\text{З}}$, де $V_M = h \cdot \pi r^2$. Звідси $m_{\text{пов}} = \frac{P_{\text{З}}V_M M_{\text{пов}}}{RT_{\text{З}}}$.

Молярну масу повітря розрахуємо для суміші газів:

$$M_{\text{пов}} = \frac{m_{\text{пов}}}{\nu} = \frac{m_{\text{пов}}}{\nu_N + \nu_O} = \frac{m_{\text{пов}}}{\frac{0{,}78m_{\text{пов}}}{M_N} + \frac{0{,}22m_{\text{пов}}}{M_O}} = \frac{m_{\text{пов}}}{\frac{0{,}78m_{\text{пов}}}{28\frac{\text{г}}{\text{моль}}} + \frac{0{,}22m_{\text{пов}}}{32\frac{\text{г}}{\text{моль}}}} \approx 28{,}9\frac{\text{г}}{\text{моль}}.$$

Сила Архімеда $F_A = \rho_{\text{В}}g_{\text{В}}V_M$, де $\rho_{\text{В}}$ – густина атмосфери біля поверхні Венери, V_M – об'єм міста.

Густину атмосфери Венери $\rho_{\text{В}}$ оцінимо за допомогою рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$P_{\text{В}}V_{\text{В}} = \frac{m_{\text{В}}}{M_{\text{В}}}RT_{\text{В}}$ або $P_{\text{В}} = \frac{\rho_{\text{В}}}{M_{\text{В}}}RT_{\text{В}}$. Звідси $\rho_{\text{В}} = \frac{P_{\text{В}}M_{\text{В}}}{RT_{\text{В}}}$.

Молярну масу атмосфери Венери $M_{\text{В}}$ розрахуємо для суміші газів аналогічно, як для розрахунку молярної маси повітря в місті:

$$M_{\text{В}} = \frac{m_{\text{В}}}{\nu} = \frac{m_{\text{В}}}{\nu_N + \nu_O} = \frac{m_{\text{В}}}{\frac{0{,}035m_{\text{В}}}{M_N} + \frac{0{,}965m_{\text{В}}}{M_{\text{C}}}} = \frac{m_{\text{В}}}{\frac{0{,}035m_{\text{В}}}{28\frac{\text{г}}{\text{моль}}} + \frac{0{,}965m_{\text{В}}}{44\frac{\text{г}}{\text{моль}}}} \approx 43{,}4\frac{\text{г}}{\text{моль}}.$$

З урахуванням зазначеного вираз (1) набуде вигляду:

$$\rho_В g_В V_M = (m_{вант} + \frac{P_З V_M M_{пов}}{RT_З} + \sigma \cdot 2\pi r^2) g_В;$$

$$\rho_В V_M = m_{вант} + \frac{P_З V_M M_{пов}}{RT_З} + \sigma \cdot 2\pi r^2;$$

$$\frac{P_В M_В}{RT_В}.\, h \cdot \pi r^2 = m_{вант} + \frac{P_З M_{пов} h \cdot \pi r^2}{RT_З} + \sigma \cdot 2\pi r^2.$$

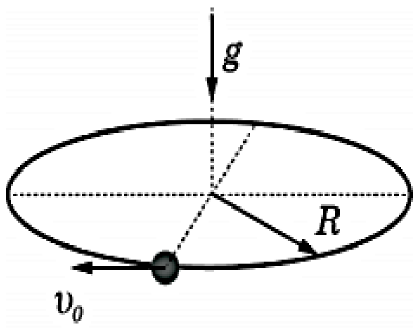
Звідси $m_{вант} = \frac{P_В M_В}{RT_В}.\, h \cdot \pi r^2 - \frac{P_З M_{пов} h \cdot \pi r^2}{RT_З} - \sigma \cdot 2\pi r^2 = \pi r^2 (h \frac{P_В M_В}{RT_В} - \frac{P_З M_{пов} h}{RT_З} - 2\sigma)$.

$$\frac{m_{вант}}{S} = (\frac{P_В M_В}{T_В} - \frac{P_З M_{пов}}{T_З}) \frac{h}{R} - 2\sigma.$$

$$\frac{m_{вант}}{S} = \frac{200}{R} \left(\frac{9{,}2 \cdot 10^6 Па \cdot 43{,}4 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль}}{(462+273)К} - \frac{0{,}1 \cdot 10^6 Па \cdot 28{,}9 \cdot 10^{-3} \frac{кг}{моль}}{(15+273)К} \right) - 2 \cdot 80 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{м^2} \approx 100 \frac{кг}{м^2}.$$

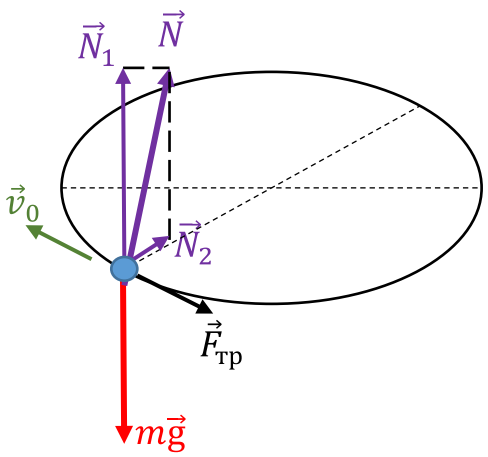
Задача 3

На тонке дротяне кільце радіусом R вільно надіта намистинка масою m. Кільце нерухоме і займає горизонтальне положення в полі сили тяжіння. Коефіцієнт тертя ковзання між намистинкою і кільцем дорівнює μ. У початковий момент намистинка рухається зі швидкістю v_0. Визначте прискорення намистинки в початковий момент.



Розв’язок

Рух кульки відбувається під дією трьох сил – сили тяжіння $\vec{F}_т = m\vec{g}$, сили реакції опори $\vec{N}$ та сили тертя $\vec{F}_{тр}$.



Сила реакції опори $\vec{N}$ має дві складові: вертикальну $\vec{N}_1$, яка компенсується силою тяжіння $\vec{F}_т$ ($N_1 = mg$), та горизонтальну $\vec{N}_2$, яка забезпечує рух намистинки по колу та наявність доцентрового прискорення намистинки ($N_2 = ma_д = m\frac{v_0^2}{R}$):

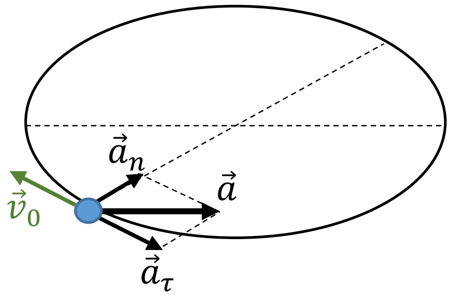
$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{(mg)^2 + \left(m\frac{v_0^2}{R}\right)^2}.$$

Сила тертя гальмує кульку, надаючи їй тангенціальне прискорення a_τ: $F_{\text{тр}} = ma_\tau$.

Сила тертя $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m\sqrt{\mathrm{g}^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$. Отже, $a_\tau = \mu\sqrt{\mathrm{g}^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$.

Повне прискорення кульки: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$;

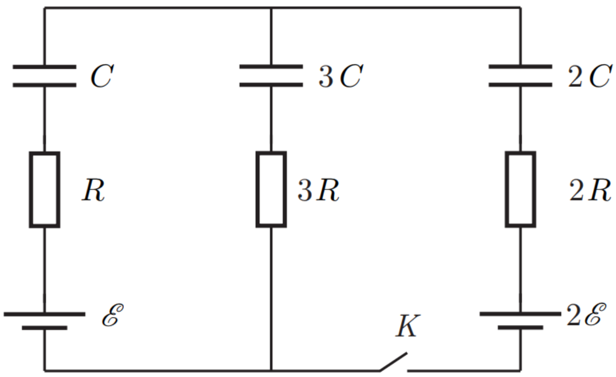
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\mu \mathrm{g})^2 + (1 + \mu^2)\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}.$$



Задача 4

Дано електричне коло з приладами, параметри яких указано на схемі.

1. Визначте напругу на конденсаторі з ємністю С при розімкнутому ключі К.
2. Визначте силу струму через резистор з опором $3R$ після замикання ключа К.
3. Яка напруга стане на конденсаторі С після закінчення усіх перехідних процесів?



Розв’язок

У початковий момент при розімкнутому ключі К струм у контурі з конденсаторами С та 3С не протікає. Еквівалентна схема цього контуру зображена на рис. 1.

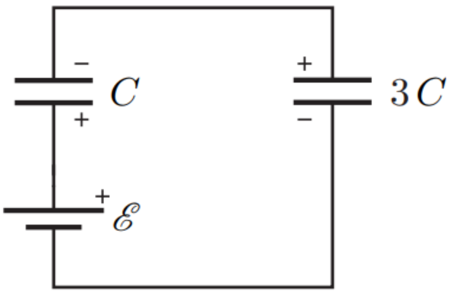


рис. 1

Сумарний заряд, зосереджений на верхніх обкладках конденсаторів C та 3C, дорівнює нулю. Отже,

$\mathcal{E} = U_C + U_{3C} = \frac{q}{C} + \frac{q}{3C} = \frac{4q}{3C}$.

Звідси $q = \frac{3C\mathcal{E}}{4}$.

Напруга на конденсаторі з ємністю C: $U_C = \frac{q}{C} = \frac{3C\mathcal{E}}{4C} = \frac{3\mathcal{E}}{4}$.

Після замикання ключа K заряд та напруга на конденсаторі 2C відсутні.

Запишемо друге правило Кірхгофа для контуру 1 (рис. 2):

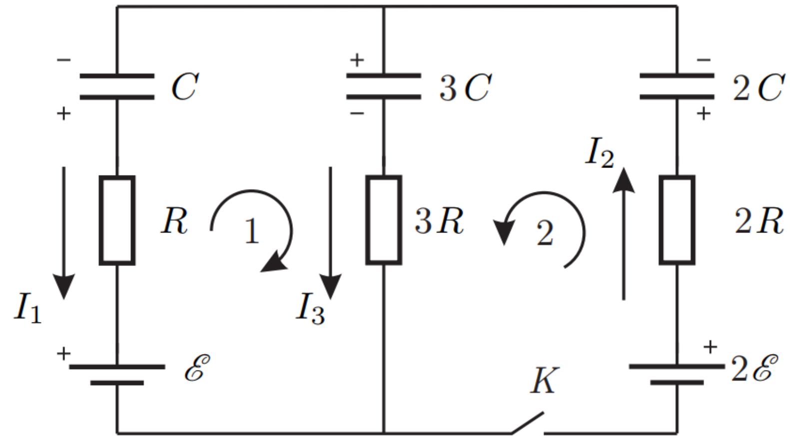


рис. 2

$$\mathcal{E} = -I_1 R + U_C + U_{3C} + I_3 \cdot 3R$$

Оскільки $\mathcal{E} = U_C + U_{3C}$, то рівняння спрощується:

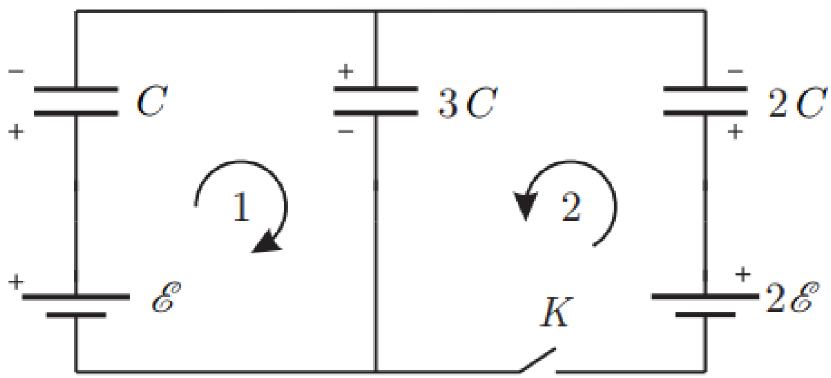
$$I_1 R = I_3 \cdot 3R \quad \text{та} \quad I_1 = 3I_3.$$

Друге правило Кірхгофа для контуру 2:

$2\mathcal{E} = I_2 \cdot 2R + U_{3C} + I_3 \cdot 3R$ або $2I_2 + 3I_3 = \frac{7\mathcal{E}}{4R}$

За першим правилом Кірхгофа: $I_2 = I_1 + I_3 = 4I_3$. Тоді $I_3 = \frac{7\mathcal{E}}{44R}$.

3. Після завершення перехідних процесів, струм у контурах 1 та 2 відсутній. Еквівалентна схема цього кола зображена на рис. ?



Сумарний заряд, зосереджений на верхніх обкладках конденсаторів C, 2C та 3C дорівнює нулю: $q_1 + q_2 = q_3$.

Для контура 1: $\mathcal{E} = \frac{q_1}{C} + \frac{q_3}{3C}$.

Для контура 2: $2\mathcal{E} = \frac{q_2}{2C} + \frac{q_3}{3C}$.

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо:

$$q_1 = \frac{1}{6}C\mathcal{E}, \;\; U_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{1}{6}\mathcal{E}.$$