

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2023-2024 н.р.**

6 клас

1. Обчисліть значення виразу: $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2023}\right)$.

2. До новорічних свят Сашко важив 91,5 кг, а Олеся – 72,4 кг. З'ясуйте, на скільки кілограмів змінилася їхня сумарна вага після новорічних свят, якщо Сашко став важчим на $\frac{2}{61}$ своєї попередньої ваги, а Олеся схудла на 0,05% тонни? Відповідь обґрунтуйте.

3. Периметр квадрата $ABCD$ дорівнює 1600 міліметрів, а периметр квадрата K_1 – 5,6 дециметрів. З'ясуйте, чому дорівнює периметр фігури F , якщо фігура K_2 – це квадрат? (рис. 1). Відповідь обґрунтуйте.

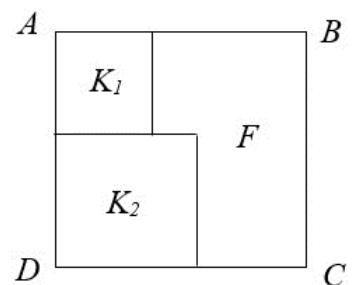


Рис. 1

4. Малюк та Карлсон беруть по черзі з пакету цукерки. Спочатку Малюк бере 1 цукерку, після цього Карлсон бере 2, далі Малюк бере 3 цукерки, а Карлсон – 4, далі Малюк бере 5 цукерок, а Карлсон 6 і так далі. Якщо наприкінці цукерок у пакеті залишилося менше, ніж має взяти Малюк чи Карлсон, то він забирає усі, що залишились. З'ясуйте, скільки могло бути цукерок у пакеті, якщо Малюк отримав рівно 101 цукерку? Відповідь обґрунтуйте.

5. З'ясуйте, яку найменшу кількість гир треба мати, щоб зважити на вагах перлини від 1 г до 13 г (маси гир – натуральні числа, їх можна класти на обидві чашки вагів)? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2023-2024 н.р.**

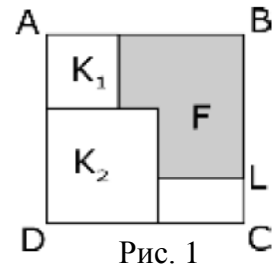
7 клас

1. Розв'яжіть рівняння:

$$(x - 2023)(x - 2024)(x - 2025) = (x - 2024)(x - 2025)(x - 2026).$$

2. В олімпіаді з математики брали участь хлопці та дівчата у відношенні 4:3. Серед нагороджених призовими дипломами – 31 учень, із них 25% дівчат і 20% хлопців. З'ясуйте, скільки учнів брали участь в олімпіаді з математики? Відповідь обґрунтуйте.

3. Периметр квадрата $ABCD$ дорівнює 16000 міліметрів, а периметр квадрата K_1 – 5,6 дециметрів. З'ясуйте, чому дорівнює периметр фігури F (рис. 1), якщо фігура K_2 – це квадрат, а довжина CL – 10 сантиметрів? Відповідь обґрунтуйте.



4. Кути AOB та BOC є суміжними. До променя OE , що є бісектрисою кута AOB , усередині кута BOC проведено промінь OK так, що $\angle EOK = 90^\circ$. Доведіть, що промінь OK є бісектрисою кута BOC .

5. З'ясуйте, яку найменшу кількість гир треба мати, щоб зважити на вагах перлини від 1 г до 13 г (маси гир – натуральні числа, їх можна класти на обидві чашки вагів)? Відповідь обґрунтуйте.

6. З'ясуйте, чи можна таблицю 2023×2023 клітинок заповнити числами 1, 2, 3, 4 так, щоб сума чисел у кожному рядку була парною, а в кожному стовпчику – непарною? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2023-2024 н.р.**

8 клас

1. З'ясуйте, яке з наступних двох чисел є більшим: $2023^{2023} \cdot 2022^{2022}$ чи $2023^{2022} \cdot 2022^{2023}$? Відповідь обґрунтуйте.

2. Дідусь наловив риби. Три найбільші рибини він віддав своєму песику, зменшивши загальну вагу улову на 35%. Потім три найменші рибини він віддав коту, зменшивши загальну масу тієї риби, що залишилась на $\frac{5}{13}$. Решту риби його родина з'їла за обідом. З'ясуйте, скільки рибин піймав дідусь? Відповідь обґрунтуйте.

3. Доведіть, що не існує натуральних чисел n та k , які задовольняють рівності: $n^n + (n + 1)^{n+1} + (n + 2)^{n+2} = 2023^k$.

4. У рівнобедреному трикутнику ABC з вершиною у точці B на основі AC вибрано довільну точку D , відмінну від вершин A і C . На прямій AC вибираємо таку точку E поза відрізком AC , для якої $AE = CD$. Доведіть, що периметр $\triangle BDE$ більший за периметр $\triangle ABC$.

5. На шахівниці 8×8 у лівому нижньому куті стоїть тура. Двоє гравців ходять по черзі: перший за один хід пересуває туру на будь-яку кількість клітинок по вертикалі вгору чи вниз, а другий – по горизонталі вправо чи вліво. Якщо під час гри тура перетнула клітину (зупинялась на ній або проходила вздовж), то ще раз перетинати таку клітину забороняється. Програє той, хто не може зробити черговий хід. З'ясуйте, хто виграє у цій грі? Відповідь обґрунтуйте.

6. У квадраті розміром 4×4 клітин деякі клітини зафарбовані в червоний колір. При цьому виявилось, що жодна чорна клітина не має суміжної сторони більше ніж з однією іншою червоною клітиною? З'ясуйте, яка найбільша кількість клітин могла бути зафарбована в червоний колір? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2023-2024 н.р.**

9 клас

1. Порівняйте значення виразів:

$$2024^4 - 2024^2 + 1 \text{ та } (2023 \cdot 2025)^2 + 2023 \cdot 2025 - 1.$$

2. Кожен із 5 братів володіє земельною ділянкою. Придбавши ділянку сусіда, вони поділили її порівну між собою. У результаті ділянка Андрія збільшилася на 10%, ділянка Бориса – на $\frac{1}{15}$, ділянка Володимира – на 5% , ділянка Григорія – на 4%, а ділянка Дмитра – на $\frac{1}{30}$. З'ясуйте, на скільки відсотків у результаті збільшилася загальна площа їх земельної ділянки? Відповідь обґрунтуйте.

3. На колі γ вибрані точки A і B . Коло ω дотикається до відрізка AB у точці K та перетинає коло γ у точках M і N . Точки лежать на колі γ у такому порядку: A, M, N, B . Доведіть, що $\angle AMK = \angle KNB$.

4. На шахівниці 8×8 у лівому нижньому куті стоїть тура. Двоє гравців ходять по черзі: перший за один хід пересуває туру на будь-яку кількість клітинок по вертикалі вгору чи вниз, а другий – по горизонталі вправо чи вліво. Якщо під час гри тура перетнула клітину (зупинялась на ній або проходила вздовж), то ще раз перетинати таку клітину забороняється. Програє той, хто не може зробити черговий хід. З'ясуйте, хто виграє у цій грі? Відповідь обґрунтуйте.

5. Кожну клітинку дошки 3×7 пофарбовано в один із двох кольорів. Доведіть, що на дошці знайдеться прямокутник, чотири кутові клітинки якого мають однаковий колір.

6. Розв'язати рівняння $[2023x[x]] = 2023$, де символом $[x]$ позначається найбільше ціле число, що менше або рівне x .

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2023-2024 н.р.**

10 клас

1. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x-2023}{x-2024} = \frac{x-2024}{x-2023}$.

2. За перший рік кількість учасників математичного конкурсу збільшилось на n чоловік, а за другий – на 300 чоловік. При цьому за перший рік кількість учасників збільшилась на 300%, а за другий – на $n\%$. З'ясуйте кількість учасників конкурсу? Відповідь обґрунтуйте.

3. Трикутник ABC , $AB > AC$ вписаний у коло, бісектриса $\angle BAC$ перетинає сторону BC трикутника в точці K , а описане коло – у точці M . Середня лінія $\triangle ABC$, що паралельна стороні AB , перетинає AM у точці O , пряма CO перетинає пряму AB у точці N . Доведіть, що навколо чотирикутника $BNKM$ можна описати коло.

4. Учитель фізкультури планує провести футбольний турнір між 8 шкільними командами в 7 турів. Протягом одного туру кожна команда грає рівно з однією іншою командою. За турнір кожна пара команд має зіграти між собою рівно один раз. Якщо вчитель провів 6 турів так, що жодна пара команд не зустрічалася двічі, чи обов'язково він зможе провести останній тур, не порушивши цієї умови?

5. Кілька дуг кола пофарбовано в жовтий колір. Сума довжин пофарбованих дуг менша довжини півкола. Доведіть, що існує діаметр, обидва кінці якого не пофарбовані.

6. З'ясуйте, чи існує на декартовій площині опуклий 2023-кутник із вершинами в точках, обидві координати яких є цілими числами, такий, що довжини всіх його сторін рівні?

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2023-2024 н.р.

11 клас

1. Число $\frac{2023}{2^{2023}}$ записане у вигляді десяткового дробу. З'ясуйте, якою буде четверта цифра з кінця в цього числа? Відповідь обґрунтуйте.
2. У середині трикутника ABC вибрали точку M , а на стороні BC – точку K таким чином, що $MK \parallel AB$. Коло, що проходить через точки M, K, C , вдруге перетинає сторону AC у точці N ; коло, що проходить через точки M, N, A , вдруге перетинає сторону AB у точці Q . Доведіть, що $BM = KQ$.
3. Учитель фізкультури планує провести футбольний турнір між 8 шкільними командами в 7 турів. Протягом одного туру кожна команда грає рівно з однією іншою командою. За турнір кожна пара команд має зіграти між собою рівно один раз. Якщо вчитель провів 5 турів так, що жодна пара команд не зустрічалася двічі, чи обов'язково він зможе провести ще два тури, не порушивши цієї умови?
4. Кілька дуг кола пофарбовано в жовтий колір. Сума довжин пофарбованих дуг менша довжини півкола. Доведіть, що існує діаметр, обидва кінці якого не пофарбовані.
5. З'ясуйте, чи існує на декартовій площині опуклий 2023-кутник з вершинами у точках, обидві координати яких є цілими числами, такий, що довжини усіх його сторін рівні?
6. Обчисліть значення виразу
$$\left[\underbrace{\sqrt{2023 + \sqrt{2023 + \sqrt{2023 + \dots + \sqrt{2023}}}}}_{2023 \text{ коренів}} \right],$$
 де символом $[x]$ позначається найбільше ціле число, що менше або рівне x .