Національний центр "Мала академія наук України"
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2023-2024 рік

11 клас (ср)

«Я ніколи не дозволяв школі
втручатися в мою освіту».
Марк Твен

11–1. Чотири натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову: $a < b < c < d$. Для якого найменшого можливого значення d може справджуватися така умова: середнє арифметичне чисел a, b, c буде у два рази меншим за середнє арифметичне чисел a, b, c, d?

11–2. У трапеції $ABCD$ основа $BC = 2AD$, на бічній стороні CD вибрана така точка M, для якої $AB = AM$. Доведіть, що $BM \perp CD$.

11–3. Задане деяке натуральне число $n > 1$. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до n і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на n. Для кожного $n > 1$ визначте, хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти?

11–4. Знайдіть найменше дійсне число M, для якого $\{a\} + \{b\} + \{c\} \leq M$ для будь-яких дійсних додатних чисел a, b, c таких, що $abc = 2024$. Тут запис $\{x\}$ позначає дробову частину числа x, наприклад, $\{3{,}14\} = 0{,}14$.

11–5. Функції $f: N \to N$ та $g: N \to N$ визначаються таким чином: для кожного $n \in N$ $f(n)$ – найменше натуральне число, факторіал якого ділиться націло на n, а $g(n) = f(n+1) - f(n)$. Доведіть, що функція g необмежена.
Для натурального числа k його *факторіалом* називається добуток $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

Київ, 28 січня 2024 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Національний центр "Мала академія наук України"
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2023-2024 рік

<u>11 клас (ср)</u>

«Я ніколи не дозволяв школі
втручатися в мою освіту».
Марк Твен

11–1. Чотири натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову: $a < b < c < d$. Для якого найменшого можливого значення d може справджуватися така умова: середнє арифметичне чисел a, b, c буде у два рази меншим за середнє арифметичне чисел a, b, c, d?

11–2. У трапеції $ABCD$ основа $BC = 2AD$, на бічній стороні CD вибрана така точка M, для якої $AB = AM$. Доведіть, що $BM \perp CD$.

11–3. Задане деяке натуральне число $n > 1$. Петрик та Василь грають у таку гру. Вони роблять ходи по черзі і починає Петрик. За один хід гравець вибирає одне із чисел від 1 до n і записує його на дошку. Кожне число протягом гри можна вибрати не більше одного разу. Програє той, після чийого ходу добуток чисел на дошці буде ділитися на n. Для кожного $n > 1$ визначте, хто виграє за умови, що кожний гравець прагне перемогти?

11–4. Знайдіть найменше дійсне число M, для якого $\{a\} + \{b\} + \{c\} \leq M$ для будь-яких дійсних додатних чисел a, b, c таких, що $abc = 2024$. Тут запис $\{x\}$ позначає дробову частину числа x, наприклад, $\{3{,}14\} = 0{,}14$.

11–5. Функції $f: N \to N$ та $g: N \to N$ визначаються таким чином: для кожного $n \in N$ $f(n)$ – найменше натуральне число, факторіал якого ділиться націло на n, а $g(n) = f(n+1) - f(n)$. Доведіть, що функція g необмежена.
Для натурального числа k його *факторіалом* називається добуток $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

Київ, 28 січня 2024 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів