Національний центр "Мала академія наук України"
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2023-2024 рік

10 клас (ср)

«Я ніколи не дозволяв школі втручатися в мою освіту».
Марк Твен

10–1. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких число $4b - 1$ ділиться націло на число $3a + 1$, а число $3a - 1$ ділиться націло на число $2b + 1$.

10–2. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектрису BL та висоту AD, що перетинаються в точці T. Виявилося, що висота LK ΔALB ділиться навпіл прямою AD. Доведіть, що $KT \perp BL$.

10–3. На острові живуть 2025 людей, кожний з яких є лицарем, тобто завжди каже правду, або брехуном, тобто завжди бреше. Деякі мешканці острова знайомі один з одним, при цьому кожний має принаймні одного знайомого, але не більше трьох. Кожний мешканець острова стверджує, що серед його знайомих рівно два брехуна.

а) Яка найменша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

б) Яка найбільша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

10–4. Чи існує для натурального числа n така перестановка усіх його натуральних дільників $(d_1, d_2, \dots d_k)$, що рівняння

$$d_k x^{k-1} + \dots + d_2 x + d_1 = 0$$

має раціональний корінь, якщо:

а) $n = 2024$; ***б)*** $n = 2025$?

10–5. Петрик мав необмежену кількість жовтої та синьої фарби. У дволітрову банку він налив 1 л жовтої та 1 л синьої фарби, які рівномірно перемішалися між собою, утворивши єдину суміш. За один крок Петрик виливає 1 л суміші з банки та доливає в банку 1 л жовтої або 1 л синьої фарби. Після n таких кроків відсоток синьої фарби в отриманій суміші мав значення від 83% до 84%. Для якого найменшого значення n це могло статися? Перша дія Петрика, коли він злив вперше разом 1 л жовтої та 1 л синьої фарби не рахується.

Київ, 28 січня 2024 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Національний центр "Мала академія наук України"
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2023-2024 рік

10 клас (ср)

«Я ніколи не дозволяв школі втручатися в мою освіту».
Марк Твен

10–1. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), для яких число $4b - 1$ ділиться націло на число $3a + 1$, а число $3a - 1$ ділиться націло на число $2b + 1$.

10–2. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектрису BL та висоту AD, що перетинаються в точці T. Виявилося, що висота LK ΔALB ділиться навпіл прямою AD. Доведіть, що $KT \perp BL$.

10–3. На острові живуть 2025 людей, кожний з яких є лицарем, тобто завжди каже правду, або брехуном, тобто завжди бреше. Деякі мешканці острова знайомі один з одним, при цьому кожний має принаймні одного знайомого, але не більше трьох. Кожний мешканець острова стверджує, що серед його знайомих рівно два брехуна.

а) Яка найменша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?
б) Яка найбільша кількість лицарів може бути серед мешканців острова?

10–4. Чи існує для натурального числа n така перестановка усіх його натуральних дільників $(d_1, d_2, \dots d_k)$, що рівняння

$$d_k x^{k-1} + \cdots + d_2 x + d_1 = 0$$

має раціональний корінь, якщо:

а) $n = 2024$; ***б)*** $n = 2025$?

10–5. Петрик мав необмежену кількість жовтої та синьої фарби. У дволітрову банку він налив 1 л жовтої та 1 л синьої фарби, які рівномірно перемішалися між собою, утворивши єдину суміш. За один крок Петрик виливає 1 л суміші з банки та доливає в банку 1 л жовтої або 1 л синьої фарби. Після n таких кроків відсоток синьої фарби в отриманій суміші мав значення від 83% до 84%. Для якого найменшого значення n це могло статися? Перша дія Петрика, коли він злив вперше разом 1 л жовтої та 1 л синьої фарби не рахується.

Київ, 28 січня 2024 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів