

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.**

6 клас

1. Обчисліть значення виразу:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2022}\right).$$

2. Щоб піднятися на перший поверх хмарочоса, треба пройти 7 сходинок, між поверхами знаходиться однакова кількість сходинок. У день, коли в хмарочосі не працював ліфт, Антон на шляху до своєї квартири пройшов 95 сходинок, Богдана – 117 сходинок, Вітя – 205 сходинок, Галя – 249, Даша – 293 сходинки. Мирон живе на останньому поверсі, він пройшов 535 сходинок. З'ясуйте, на якому поверсі живе кожна дитина?

3. Два пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший робить рейс за 6 днів, а другий – за 8 днів. Якось у суботу вони зустрілись в порту. З'ясуйте, через скільки днів вони зустрінуться в порту в суботу наступного разу?

4. З'ясуйте, як із діжки набрати рівно 3 л узвару, якщо є 4-літровий та 5-ти літровий посуд?

5. Куб із ребром 3 розрізано на 27 менших кубиків зі стороною 1. Після цього 21 маленький кубик було пофарбовано у жовтий колір, а 6 інших – у блакитний. Потім із малих кубиків знову склали великий таким чином, щоб частина поверхні великого кубика мала якомога менше блакитних фрагментів. З'ясуйте, яку частину за таких умов від усієї площі поверхні куба утворюють блакитні частини? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.**

7 клас

1. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{x+2023}$, якщо $\frac{1}{x+2022} = 3$.

2. У Сашка в акваріумі – 200 рибок: із них 1% блакитного кольору, решта рибок – жовті. З'ясуйте, скільки жовтих рибок потрібно забрати з акваріуму, щоб блакитні рибки становили 2% рибок, що залишилися в акваріумі? Відповідь обґрунтуйте.

3. Турист пройшов половину шляху між пунктами A і B зі швидкістю 4 км/год, а решту шляху до B – зі швидкістю 6 км/год. На зворотному шляху від B до A $\frac{2}{3}$ цього шляху він пройшов зі швидкістю, що дорівнює середній швидкості руху в напрямі від A до B , а решту шляху пройшов зі швидкістю 5 км/год. Знайдіть відстань між пунктами A і B , якщо відомо, що на зворотний шлях турист витратив на 2 хвилини менше, ніж на весь шлях від A до B . (Указана середня швидкість дорівнює відношенню відстані від A до B до всього часу руху в напрямі від A до B).

4. У трикутнику ABC на стороні BC вибрано таку точку K , що відрізок AK перетинає медіану BM у точці N , причому $AN = BC$. Доведіть, що $BK = KN$.

5. У пустелі зустрілися два мандрівники. Один із них мав наповнену водою дванадцятилітрову посудину, а інший мав дві порожні – восьмилітрову та п'ятилітрову. Перший із мандрівників вирішив поділити воду порівну, але не знав, як це зробити. З'ясуйте, як треба діяти мандрівникам, щоб налити шість літрів води у восьмилітрову посудину?

6. Задано круг і кільце навколо нього, яке розрізане на 11 однакових частин (рис. 1). З'ясуйте, чи можна пофарбувати одержані 11 частин і круг у три кольори – жовтий, блакитний і червоний таким чином, щоб жодні дві фігури, пофарбовані в однаковий колір, не мали спільної межі? Відповідь обґрунтуйте.

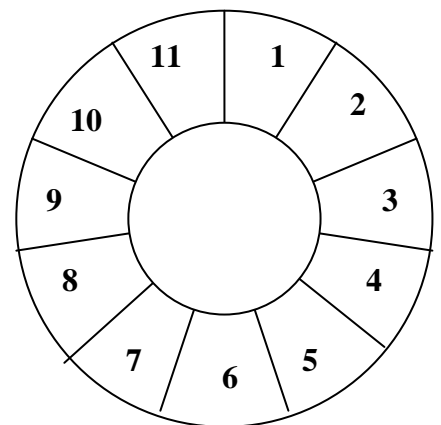


Рис. 1

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.**

8 клас

1. Знайдіть значення виразу $(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2023}) \cdot 2023$.

2. Пасажир прийшов на залізничний вокзал міста Суми за 5 хвилин до відправлення потягу. Якби відстань до вокзалу була на 1 км більшою, то йдучи з такою самою швидкістю, він запізнився б на 5 хвилин. З'ясуйте, із якою швидкістю йшов пасажир? Відповідь обґрунтуйте.

3. Ціну винограду підвищили на 20%. Для того, щоб записати нову ціну за 1 кг винограду в гривнях, продавцеві було достатнім поміняти місцями цифри числа, записаного на ціннику. З'ясуйте, скільки гривень коштував 1 кг винограду до їхнього подорожчання, якщо ця ціна була меншою за 100 гривень? Відповідь обґрунтуйте.

4. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 2BC$. На стороні AB прямокутника побудовано рівносторонній трикутник ABE так, що його сторони AE і BE перетинають відрізок CD . Точка M – середина BE . Знайдіть кут MCD .

5. Три числа мають НСК, що в 2022 рази більший за їх НСД, який у свою чергу більший 1. З'ясуйте, яке найменше значення має сума цих трьох чисел? Відповідь обґрунтуйте.

6. Чотири команди зіграли у декілька кіл турнір, тобто кожна команда з кожною іншою зіграли однакову кількість зустрічей. За перемогу нараховувалося 3 очки, за нічию кожна команда отримувала 1 очко, за поразку очок не нараховувалося. Разом усі команди набрали 46 очок. З'ясуйте, скільки ігор завершилися внічию? Відповідь обґрунтуйте.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.**

9 клас

1. Розв'яжіть рівняння: $\frac{(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = 2022$.

2. Ціну винограду підвищили на 20%. Для того, щоб записати нову ціну за 1 кг винограду в гривнях, продавцеві було достатнім поміняти місцями цифри числа, записаного на ціннику. З'ясуйте, скільки гривень коштував 1 кг винограду до їхнього подорожчання, якщо ця ціна була меншою за 100 гривень? Відповідь обґрунтуйте.

3. Зібраний мед заповнюють у декілька 50 літрових бідони. Якщо його перелити в 40-літрові бідони, то їх буде треба на 5 бідонів більше, але один з них лишиться неповним. Якщо зібраний мед розлити у 70-літрові бідони, то знадобиться на 4 бідони менше, і знову один з них буде неповним. З'ясуйте, скільки 50-літрових бідонів заповнює зібраний мед?

4. На бісектрисі AL трикутника ABC вибрано точку D . Відомо, що $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ADC = 3\alpha$, $\angle ACB = 4\alpha$. Доведіть, що $BC + CD = AB$.

5. Деякі сторони клітинок шахівниці пофарбовано у червоний колір, а інші – у синій колір. Дозволяється обирати деяку клітинку дошки та перефарбовувати всі її сторони одночасно в протилежний колір. З'ясуйте, чи завжди можна зробити декілька перефарбувань таким чином, щоб синіми стали менше $\frac{1}{4}$ від загальної кількості сторін клітинок? Відповідь обґрунтуйте.

6. Розв'язати рівняння: $\{x\}^2 + 2\{x\} = 3x^2$, де $\{x\} = x - [x]$ – дробова частина числа x , $[x]$ – ціла частина числа x

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

**II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.**

10 клас

1. Обчисліть: $\sqrt{1+2022^2+\frac{2022^2}{2023^2}}+\left(\frac{2023}{2022}\right)^{-1}$.
2. Із колби з 10% розчином спирту відлили $\frac{1}{3}$ частину й долили води так, що колба стала заповнена на $\frac{5}{6}$ від початкового об'єму. З'ясуйте, яким став процентний вміст спирту в колбі?
3. Опукий чотирикутник $ABCD$, вписаний у коло, діаметром якого є відрізок AC . Нехай точки H і K є основами перпендикулярів, які проведено з точки B до прямих AC і AD відповідно. Доведіть, що пряма KH ділить відрізок BD навпіл.
4. Скільки існує трійок натуральних чисел (a,b,c) , що задовольняють умови: $2 \leq a \leq b \leq c$ та $a \cdot b \cdot c = 2021 \cdot 2022$?
5. Кожна з точок площини пофарбована в один з трьох кольорів. Доведіть, що знайдуться дві точки, пофарбовані в один колір, відстань між якими дорівнює 1.
6. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} (|3x-y|-3)(|3x+y|-3)=0 \\ y-\{4x\}=0 \end{cases}, \text{ де } \{a\} - \text{дробова частина числа } a.$$

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Використання цифрових пристроїв не дозволяється

Завдання

II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2022-2023 н.р.

11 клас

1. Порівняйте числа $\left(\frac{2022}{2023}\right)^4$ та $\left(\frac{2021}{2022}\right)^7$.
2. На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle BAC = 90^\circ$) відмічено точку D , таку, що $\angle CBD = 30^\circ$. Доведіть, що $CD \geq 2AD$.
3. Кожна з точок площини пофарбована в один з трьох кольорів. Доведіть, що знайдуться дві точки, пофарбовані в один колір, відстань між якими дорівнює 1.
4. Скільки існує натуральних $n \leq 2022$, для яких множину $M = \{1, 2, \dots, n\}$ можна поділити на дві множини A, B : $A \cup B = M$, $A \cap B = \emptyset$, кожна з множин A, B містить однакову кількість елементів і кожна з них містить у якості свого елемента середнє арифметичне всіх своїх елементів.
5. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} (|3x - y| - 3)(|3x + y| - 3) = 0 \\ y - \{4x\} = 0 \end{cases}, \text{ де } \{a\} - \text{дробова частина числа } a.$$
6. З'ясуйте, чи існує така функція $f: R \rightarrow R$, яка не набуває жодного свого значення більше, ніж в одній точці, та що при всіх $x \in R$ задовольняє нерівність $\sqrt{f(x^2) - (f(x))^2} \geq \frac{1}{2}$?

На виконання роботи відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Використання цифрових пристроїв не дозволяється