Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.
6 клас

1. $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot....\cdot\left(1+\frac{1}{2022}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot...\cdot\frac{2023}{2022}=\frac{2023}{2}=1011{,}5$

2. Усі діти пройшли 7 сходинок, а далі їх шлях складався з однакових переходів між поверхами. Тому вони пройшли таку кількість сходинок між поверхами, починаючи з першого: А – 88, Б – 110, В – 198, Г – 242, Д – 286, М – 528.

Оскільки спільний дільник усіх цих чисел – 22, то легко підрахувати поверх, на якому живе кожна дитина.

А – 5 поверх (він пройде 7 сходинок до першого поверху, а далі ще 88, тобто підніметься ще на 4 поверхи); Б – 6 поверх, В – 10 поверх, Г – 12 поверх, Д – 14 поверх, М – 25 поверх.

Відповідь: А – 5 поверх; Б – 6 поверх, В – 10 поверх, Г – 12 поверх, Д – 14 поверх, М – 25 поверх.

3. Нехай *n* – шукана кількість днів, через яку пароплави зустрінуться у порту в суботу наступного разу.

Оскільки перший пароплав робить рейс за 6 днів, то *n* повинно націло ділитися на число 6, отже 6 є дільником числа *n*.

За умовою другий пароплав робить рейс за 8 днів, тому *n* повинно націло ділитися на число 8,отже 8 є дільником числа *n*.

Оскільки пароплави повинні зустрітися саме у суботу (у такий самий день тижня, у який вони зустрілися востаннє), то *n* повинно націло ділитися й на число 7.

Отже, 7 є дільником числа *n*. Таким чином шукане число *n* повинно бути спільним кратним чисел 6, 8 та 7. Оскільки *n* є найменшим («у порту в суботу наступного разу»), то шукане число *n* повинно бути найменшим спільним кратним чисел 6, 8 і 7, тобто *n* = НСК(6;8;7) =168.

Відповідь: 168**.**

4. Розв’язання подамо у вигляді таблиці.

Посуд	крок			
	№1	№2	№3	№4
5 л	-	4	4	5
4 л	4	-	4	3

5. Із всіх 27 кубиків 1 – розташований повністю всередині великого кубика, ще 6 – мають з поверхнею великого кубика рівно 1 грань, ще 12 – по 2 спільні квадратики, і ті 8, що розашовані по кутах великого кубика мають по 3 спільні грані.

Таким чином, для найменшої кількості блакитних граней має бути 1 всередині та інші 5, щоб мали рівно 1 спільну грань. Таким чином, усього 5 блакитних малих квадратиків з 9·6=54. Отже, шукане відношення $\frac{5}{54}$.

Відповідь: $\frac{5}{54}$.

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді
II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.
7 клас

1. Із рівняння $x+2022=\frac{1}{3}$ маємо, що $x+2023=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$, тоді $\frac{1}{1+2023}=\frac{3}{4}$.

Відповідь: $\frac{3}{4}$.

2. Кількість рибок блакитного кольору: 0,01 · 200 = 2. Щоб вони становили 2 %, у акваріумі повинно бути 100 рибок, тому необхідно забрати: 200-100=100 жовтих рибок з акваріуму.

Відповідь: 100.

3. Позначимо половину шляху через *x* км, тоді час руху від *A* до *B* дорівнює $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=\frac{5x}{12}$ годин. Отже, середня швидкість становить $\frac{2x}{\frac{5x}{12}}=4{,}8$ год.

Отримуємо рівняння: $\frac{2x}{4{,}8}-\frac{\frac{4x}{3}}{4{,}8}-\frac{\frac{2x}{3}}{5}=\frac{1}{30}$. Звідси x=6.

Відповідь: 12 км.

4. Продовжимо медіану BM за точку M на довжину цієї медіани (рис. 1). Отримаємо точку B_1 таку, що $B_1M = MB$. Тоді $\triangle AMB_1 = \triangle CMB$ (за двома сторонами та кутом між ними (вертикальному).

Отже, $AB_1 = BC = AN$.

Тоді, $\triangle NAB_1$ – рівнобедрений,

тому $\angle ANB_1 = \angle AB_1N$.

Окрім того, $\angle AB_1N = \angle NBK$, бо $\triangle AMB_1 = \triangle CMB$.

$\angle BNK = \angle ANB_1$ (як вертикальні).

Отже, $\angle BNK = \angle NBK$.

Тоді $\triangle BKN$ – рівнобедрений, $BK = KN$.

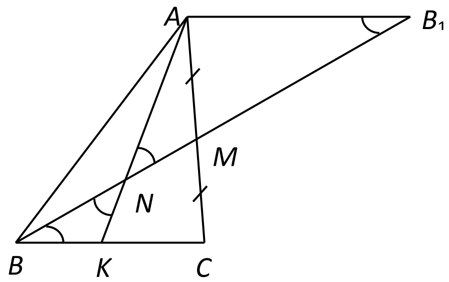

Рис. 1

5. Розв'язання подамо у вигляді таблиці.

1	2	3	4	5	6	7	8
12	4	4	9	9	1	1	6
0	8	3	3	0	8	6	6
0	0	5	0	3	3	5	0

6. Припустимо, що ми можемо це зробити.

Без обмеження загальності будемо вважати, що круг у центрі (рис. 2) пофарбовано в червоний колір.

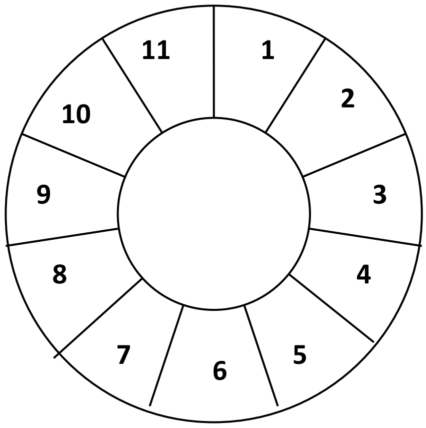

Рис. 2

Він має спільну межу з кожним із секторів, тому всі вони повинні бути пофарбовані в жовтий і блакитний кольори.

Якщо перший пофарбовано в жовтий колір, і оскільки він межує з другим сектором, то другий сектор має бути пофарбовано в блакитний колір, далі так само, третій фарбується знову в жовтий, четвертий – у блакитний і т.д.

При цьому, це єдина можливість потрібного фарбування.

Дійдемо до 10 сектора, він повинен бути пофарбований у блакитний колір. Тому далі 11-й сектор треба пофарбувати в жовтий колір, але тоді він має спільну межу з першим сектором, який так само жовтий.

Одержана суперечність показує неможливість указаного фарбування.

Відповідь: не можна.

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.
8 клас

1. $(1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023})\cdot 2023=(2-\frac{1}{2023})\cdot 2023=4046-1=4045.$

Відповідь: 4045.

2. Нехай s – відстань, v – швидкість, тоді $\frac{s}{v}=t-5$ і $\frac{s+1}{v}=t+5,$ отже $\frac{s}{v}-\frac{s+1}{v}=t-5-t-5=-10,$ $-\frac{1}{v}=-10,$ v=0,1.

Відповідь: 0,1 км/хв.

3. Нехай початкова ціна 1кг винограду $-\overline{ab}$, ціна після подорожчання – $\overline{ba}$.
За умовою задачі $\overline{ba}$ =1,2 $\overline{ab}$; 10b+a = 1,2(10a+b), 10 b – 1,2b= 11 a,8,8b=11a, $a=\frac{4b}{5}$.
Отже, b=5, a= 4.

Відповідь: 45грн.

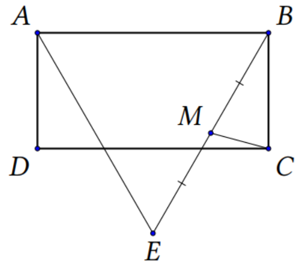

Рис. 1

4. Оскільки Δ ABE – рівносторонній, то $\angle ABE$= 60° (рис. 1).
Тоді $\angle EBC$ = 90° – 60° = 30°. $BM=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}AB=BC$; отже ΔMBC – рівнобедрений.
$\angle BCM=\frac{1}{2}$(180° – 30°) = 75°, отже $\angle MCD$ =90° – 75° = 15°.

Відповідь: 15°

5. 2022=2·3·337. Тоді, принаймні, одне з чисел має ділитися на 2, одне – на 3, одне – на 337. Якщо НСД цих чисел d ≥337, то сума цих трьох чисел не менше за 337·3=1011. Якщо d ≥3, то одне з чисел не менше за 337·3=1011, а тому й сума не може бути менше. Таким чином, треба, щоб d=2. Звідси легко збагнути, що найменшим набором чисел, що задовольняє умови будуть такі 3 числа: 337·2=674, 3·2=6 та 2·2=4. Вони мають суму 684.

Відповідь: 684.

6. Нехай було зігране k кіл у цьому змаганні, тоді ігор усього було зіграно: $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\,k$=6 k. Команд – 4, у кожному колі команда грає 3 гри, при додаванні кожна гра рахується 2 рази. Якщо нічиїх не було б, то набрано було всіма разом командами 6 k·3=18 k· очок, тобто найбільша можлива сумарна кількість. Якби всі ігри зіграно внічию, було б набрано найменшу кількість очок – 6·2 k=12 k. Таким чином, сумарна кількість очок має бути між цими двома виразами.

При k=1 – у межах від 12 до 18, при k=2 – у межах від 24 до 36, при k=3 – у межах від 36 до 54 (можливий варіант), при k=4 – у межах від 48 до 72.

Отже, кількість кіл в турнірі – 3. На кожній нічиїй втрачається рівно 1 очко від максимально можливої кількості.

Таким чином, 54 – 46 = 8 ігор завершилися внічию.

Відповідь: 8.

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.
9 клас.

1. $\begin{cases} -x \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$ $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$, тому $\frac{(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{x^2}}{2x^2} = \frac{-2x}{2x^2}$, $\frac{-2x}{2x^2} = 2022$, $-\frac{1}{x} = 2022$, $x = -\frac{1}{2022}$

Відповідь: $x = -\frac{1}{2022}$

3. Нехай початкова ціна 1кг винограду $-\overline{ab}$, ціна після подорожчання – $\overline{ba}$. За умовою задачі $\overline{ba}$=1,2 $\overline{ab}$; $10b+a = 1{,}2(10a+b)$, $10\,b - 1{,}2b = 11\,a$, $8{,}8b=11a$, $a = \frac{4b}{5}$. Отже, b=5, a= 4.

Відповідь: 45грн.

3. Запишемо умову задачі у вигляді таких нерівностей:

$$40(n+4) < 50n < 40(n+5) \text{ та } 70(n-5) < 50n < 70(n-4) \Rightarrow$$
$$4n + 16 < 5n < 4n + 20 \text{ та } 7n - 35 < 5n < 7n - 28 \Rightarrow$$
$$16 < n < 20 \text{ та } 28 < 2n < 35 \Rightarrow 16 < n < 17{,}5 \Rightarrow n = 17.$$

Відповідь: 17.

4. На продовженні відрізка BC за точку C виберемо точку E так, що CD=CE (рис.1).

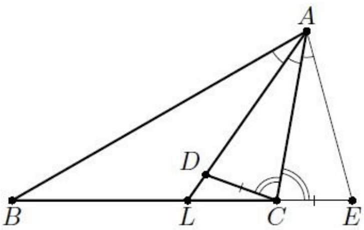

Рис. 1

Тоді $\angle ACD$=180°–$\angle DAC$–$\angle ADC$=180°–4α=$\angle ACE$.

ΔACD=ΔACE (за двома сторонами та куту між ними), тому $\angle AEC$=$\angle ADC$=3α і $\angle CAE$=$\angle CAD$=α.

$\angle BAE$=$\angle BAC$+$\angle CAE$=3α=$\angle AEB$.

Таким чином, ΔABE– рівнобедрений і AB=BE=BC+CE=BC+CD.

5. Зауважимо, що всього можна зафарбувати 144 одиничних відрізки – сторони клітинок. Тоді зафарбуємо по 9 горизонтальних сторін клітинок першого, третього, п’ятого та сьомого стовпців шахівниці в синій колір. При цьому отримаємо 72 вершини клітинок, із яких виходить непарна кількість синіх відрізків. Зрозуміло, що при всіх перефарбуваннях вона залишатиметься непарною, а отже кількість вершин, із яких виходять сині відрізки, зменшитися не може.

Оскільки кожен такий відрізок сполучає лише дві вершини, то кількість синіх відрізків не менша за 72:2=36=144:4.

Відповідь: не завжди.

6. $\{x\}^2 + 2\{x\} = 3x^2$

Оскільки $0 \leq \{x\} < 1$, то x^2<1, тобто -1<x<1. Якщо $x \in [0;1)$, то x=$\{x\}$, знаходимо x=0. Для $x \in (-1;0)$ позначимо $u = \{x\}$, 0<u<1, $[x] = -1$, x=-1+ u.

Тоді з рівняння $2u^2$–$8u$+3=0, із урахуванням нерівності 0<u<1, одержуємо u= $2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$, x= $1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Відповідь: $1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$; 0.

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.
10 клас

1. Розглянемо вираз: $1+2022^2+\frac{2022^2}{2023^2}$. Нехай 2022 = a. Тоді маємо:

$$\frac{(a+1)^2+a^2(a+1)^2+a^2}{(a+1)^2}=\frac{a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a}{(a+1)^2}=(\frac{a^2+a+1}{a+1})^2.$$

$$\sqrt{1+2022^2+\frac{2022^2}{2023^2}}+\left(\frac{2023}{2022}\right)^{-1}=\frac{a^2+a+1}{a+1}+\frac{a}{a+1}=\frac{(a+1)^2}{a+1}=a+1=2023.$$

Відповідь: 2023.

2. Нехай V– початковий об'єм колби, тоді $\frac{V}{10}$– об'єм спирту в колбі. Коли відлили $\frac{V}{3}$, то в тому розчині, що залишився, об'єм спирту складає $\frac{2V}{30}$. Після доливання води об'єм розчину став $\frac{5V}{6}$, спирту залишився той самий об'єм $\frac{2V}{30}$, що складає $\frac{\frac{2V}{30}\cdot 100}{\frac{5V}{6}}\%=8\%$.

Відповідь: 8 %.

3. Нескладно помітити, що пряма *KN* обов'язково перетинає півпряму *DC*. Нехай *F* – їх спільна точка, тоді точки *A, B, H, K* належать одному колу, при цьому $\angle BAH=\angle BKH=\angle HBC=\angle HFD$. Отже, точки *B*, *H*, *F*, *C* також належать одному колу, тому $\angle BFD=90^0$. Таким чином чотирикутник *DKBF*– прямокутник, отже пряма *KH* ділить відрізок *BD* навпіл.

4. Розкладемо на множники числа 2021 = 43 · 47 та 2022 = 2 · 3 · 337. Таким чином, нам треба ці 5 множників поділити на 3 групи та порахувати кількість таких поділів, що відрізняються. Для кожного такого поділу числа однозначно упорядковуються та відповідають одній шуканій трійці чисел. Таким чином, рахуємо варіанти. Якщо поділ на числа буде 3 - 1 - 1, то таких варіантів 10. Якщо поділ 2 - 2 - 1, то таких варіантів $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 3=15$. Разом маємо 10 + 15 = 25.

Відповідь: 25.

5. Припустимо протилежне. Розглянемо рівносторонній Δ *ABC* із стороною 1, усі вершини якого різного кольору.

Візьмемо точку A_1, симетричну точці *A* відносно прямої ВС.

Тоді A_1 одного кольору з *A* і коло з центром *A*, радіусом AA_1 повинно бути пофарбовано в той же колір. На цьому колі знайдуться дві точки, відстань між якими дорівнює 1.

6. Із умови маємо : $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} |3x-y|-3=0 \\ |3x+y|-3=0 \end{array} \right. \\ y-\{4x\}=0 \end{cases}$.

Розглянемо два випадки:

а) $\begin{cases} |3x-y|=3 \\ y-\{4x\}=0 \end{cases}$.

$3x-\{4x\}=\pm 3$

$3x-4x+[4x]=\pm 3$

$[4x]=\pm 3+x$.

Оскільки $[4x]\in Z$, то $\pm 3+x\in Z$, тоді $x\in Z$ і $4x\in Z$.

Це означає, що $\{4x\}=0$ і $y=0$. Отже, $x=\pm 1$.

б) $\begin{cases} |3x+y|=3 \\ y-\{4x\}=0 \end{cases}$.

$3x+\{4x\}=\pm 3$

$3x+4x-[4x]=\pm 3$

$[4x]=7x\mp 3$.

Оскільки $[4x]\in Z$, то $7x\mp 3\in Z$. Тоді $7x\in Z$, тобто $x=\frac{m}{7}$, де $m\in Z$.

Якщо $m=7k, k\in Z$, то $y=\{4x\}=0$, $x=\pm 1$.

Нехай $m=7k+r, k\in Z, r=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Якщо $r=1$, то $y=\{4x\}=\left\{4\cdot\frac{7k+1}{7}\right\}=\left\{\frac{4}{7}\right\}=\frac{4}{7}$ і $x=\pm 1-\frac{4}{21}$. Але $7x\notin Z$.

Аналогічно перевіряються випадки $r=2, 3, 4, 5$.

Якщо $r=6$, то $y=\{4x\}=\left\{4\cdot\frac{7k+6}{7}\right\}=\left\{\frac{24}{7}\right\}=\frac{3}{7}$ і $x=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$, або $x=-1-\frac{1}{7}=-\frac{8}{7}$. В обох випадках $7x\in Z$. Залишилось зробити перевірку.

Відповідь: $(\pm 1;0)$, $\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7}\right)$, $\left(-\frac{8}{7};\frac{3}{7}\right)$.

Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді
ІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики
2022-2023 н.р.
11 клас

1. $\frac{2022}{2023}=1-\frac{1}{2023}, \frac{2021}{2022}=1-\frac{1}{2022}$.

$\frac{1}{2023}<\frac{1}{2022}$,

$1-\frac{1}{2023}>1-\frac{1}{2022}$,

$\frac{2022}{2023}>\frac{2021}{2022}$

$\left(\frac{2022}{2023}\right)^4>\left(\frac{2021}{2022}\right)^4>\left(\frac{2021}{2022}\right)^7$.

2. Подовжимо *CA* за точку *A*, відмітимо точку *E* таку, що *AE* = *AD*. Прямокутні трикутники *BAE* і *BAD* рівні за двома катетами, отже *BD* = *BE*. Доведемо, що $DC \geq DE$.

Через точку *D* проведемо пряму, паралельну *BC*, нехай вона перетинає відрізок *BE* у точці *F*.

Достатньо довести, що $BF \geq FE$, і, застосувавши теорему Фалеса, одержати, що $DC \geq DE$.

Або достатньо довести, що $BF \geq \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}BD$.

Кути *FDB* и *DBC* – внутрішні різносторонні при паралельних *DF* і *BC* та січній *BD*, отже $\angle BDF = 30°$.

Але тоді в ΔBDF сторона *BF*, що лежить навпроти кута 30°, не коротша половини *BD*. Щоб це пояснити, опустимо з *B* перпендикуляр на *DF*, нехай *X* – основа цього перпендикуляра, тоді $BX = \frac{1}{2}BD$ (бо *BX* – катет, що лежить навпроти кута 30º у прямокутному трикутнику *DBX*), а $BF \geq BX$ (бо похила не коротша за перпендикуляр).

Отже, $BF \geq \frac{1}{2}BD$, $CD \geq 2AD$.

3. Припустимо протилежне. Розглянемо рівносторонній ΔABC із стороною 1, усі вершини якого різного кольору.

Візьмемо точку A_1, симетричну точці *A* відносно прямої *BC*.

Тоді A_1 одного кольору з *A* і коло з центром *A* і радіусом AA_1 повинно бути пофарбовано в той же колір. На цьому колі знайдуться дві точки, відстань між якими дорівнює 1.

4. Очевидно, що $n=2k$ – має бути парним, бо її елементи мають поділитися навпіл. Покажемо, що умова справджується для всіх $k \leq 1011$.
Наведемо шуканий поділ. Якщо k – непарне, то шуканий поділ очевидний:

$$A=\{1,2,\dots,k\}, B=\{k+1,k+2,\dots,2k\}.$$

Для парного k поділ може бути таким:

$$A=\left\{1,2,\dots,k-2,k,\frac{3k-2}{2}\right\}, B=M\backslash A.$$

Зрозуміло, що $k<\frac{3k-2}{2}\le 2k$ для $k>4$ та $\frac{3k-2}{2}\in \mathrm{N}$. Сума елементів множини A дорівнює $\frac{1}{2}k(k+2)$, а тому й середнє арифметичне елементів $\frac{1}{2}(k+2)\in A$. Аналогічно можна порахувати середнє арифметичне елементів множини B, що дорівнює $\frac{3k}{2}\in B$.

Залишилося розглянути окремо випадки $k=4,3,2,1$.

Для $k=4$ шуканий приклад: $\{1,3,4,8\},\{2,5,6,7\}$.

Для $k=3$ шуканий приклад: $\{1,2,3\},\{4,5,6\}$.

Для $k=2$ єдиними множинами, у яких середнє арифметичне буде цілим, є $\{1,3\},\{2,4\}$, але для них не виконується умова належності середнього арифметичного множині.

Для $k=1$ шуканий приклад: $\{1\},\{2\}$.

Відповідь:1010.

5. Із умови маємо : $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}|3x-y|-3=0\\ |3x+y|-3=0\end{array}\right.\\ y-\{4x\}=0\end{cases}.$

Розглянемо два випадки:

а) $\begin{cases}|3x-y|=3\\ y-\{4x\}=0\end{cases}.$

$3x-\{4x\}=\pm 3$

$3x-4x+[4x]=\pm 3$

$[4x]=\pm 3+x$.

Оскільки $[4x]\in Z$, то $\pm 3+x\in Z$, тоді $x\in Z$ і $4x\in Z$.

Це означає, що $\{4x\}=0$ і $y=0$. Отже, $x=\pm 1$.

б) $\begin{cases}|3x+y|=3\\ y-\{4x\}=0\end{cases}.$

$3x+\{4x\}=\pm 3$

$3x+4x-[4x]=\pm 3$

$[4x]=7x\mp 3$.

Оскільки $[4x]\in Z$, то $7x\mp 3\in Z$. Тоді $7x\in Z$, тобто $x=\frac{m}{7}$, де $m\in Z$.

Якщо $m=7k, k\in Z$, то $y=\{4x\}=0$, $x=\pm 1$.

Нехай $m=7k+r, k\in Z, r=1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Якщо $r=1$, то $y=\{4x\}=\left\{4\cdot\frac{7k+1}{7}\right\}=\left\{\frac{4}{7}\right\}=\frac{4}{7}$ і $x=\pm 1-\frac{4}{21}$. Але $7x\notin Z$.

Аналогічно перевіряються випадки $r=2,3,4,5$.

Якщо $r=6$, то $y=\{4x\}=\left\{4\cdot\frac{7k+6}{7}\right\}=\left\{\frac{24}{7}\right\}=\frac{3}{7}$ і $x=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$, або $x=-1-\frac{1}{7}=-\frac{8}{7}$. У обох випадках $7x\in Z$. Залишилось зробити перевірку.

Відповідь: $(\pm1;0)$, $\left(\frac{6}{7};\frac{3}{7}\right)$, $\left(-\frac{8}{7};\frac{3}{7}\right)$.

6. Припустимо, що існує $f:R\to R$, яка не набуває жодного свого значення більше, ніж в одній точці, і при всіх дійсних x задовольняє нерівність $\sqrt{f(x^2)-(f(x))^2}\ge\frac{1}{2}$. Маємо: $f(x^2)-(f(x))^2\ge\frac{1}{4}$.

Нехай $x=0$. $f(0)-(f(0))^2\ge\frac{1}{4}$, $(f(0)-\frac{1}{2})^2\le0$. Тоді $f(0)=\frac{1}{2}$.

Нехай $x=1$. $f(1)-(f(1))^2\ge\frac{1}{4}$, $(f(1)-\frac{1}{2})^2\le0$. Тоді $f(1)=\frac{1}{2}$.

Одержали $f(0)=f(1)$.

Отже, значення $\frac{1}{2}$ функція набуває принаймні в двох точках, що суперечить умові.

Відповідь: не існує.