Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді

III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2022-2023 н.р.

10 клас

1. Зрозуміло, що $44 \le \sqrt{2023} < 45$, тому $[\sqrt{2023}] = 44$.

Міркуючи аналогічно, отримаємо:

$$2067 \le 2023 + \sqrt{2023} < 2068,$$

$$45^2 < 2067 \le 2023 + \sqrt{2023} < 2068 < 46^2,$$

$$45 \le \sqrt{2023 + \sqrt{2023}} < 46 \text{ та } [\sqrt{2023 + \sqrt{2023}}] = 45.$$

Аналогічно

$$2067 \le 2023 + \sqrt{2023 + \sqrt{2023}} < 2068,$$

$$45 \le \sqrt{2023 + \sqrt{2023 + \sqrt{2023}}} < 46 \text{ та}$$

$$[\sqrt{2023 + \sqrt{2023 + \sqrt{2023}}}] = 45.$$

Аналогічна ситуація буде, коли доданків вже стане 4. Тобто, у подальшому, на значення цілої частини виразу кількість доданків не буде впливати. Тому

$$[\underbrace{\sqrt{2023 + \sqrt{2023 + \sqrt{2023 + \ldots + \sqrt{2023}}}}}_{2023 \text{ коренів}}] = 45.$$

Відповідь: 45.

2. Нехай спочатку було x учасників, тоді через рік їх стало $(x+n)$, а через два роки – $(x+n+300)$. За перший рік кількість учасників збільшилась на $\frac{n}{x} \cdot 100\%$, а за другий рік – на $\frac{300}{x+n} \cdot 100\%$.

Маємо рівняння $\frac{n}{x} \cdot 100 = 300$ і $\frac{300}{x+n} \cdot 100 = n$.

З першого рівняння $n=3x$, тоді $\frac{300}{x+n} \cdot 100 = 3x$, звідки $x=50$.

Учасників стане 50+150+300=500 чоловік.

Відповідь: 500.

3. Продовжимо AB та DL до перетину – отримаємо точку K.

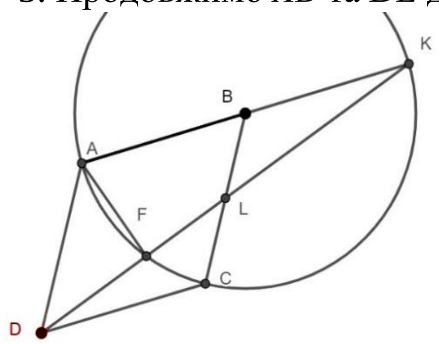

Рис. 1

$\Delta BKL = \Delta CDL$ (за стороною $BL = CL$ і двома прилеглими кутами $\angle BLK = \angle CLD$, $\angle LBK = \angle LCD$: $AB \parallel CD$, BC– січна), тому $BK = CD = BC = AB$.

Отже, точки A, C, K лежать на колі з центром в точці B, діаметром якого є відрізок AK. Оскільки $\angle AFK = 90^\circ$, то точка F теж лежить на цьому колі.

Маємо: $\angle KFC = \frac{1}{2} \cup BK = \frac{1}{2}\angle CBK = \frac{1}{2}(180° - \angle B) = \frac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$ і $\angle DFC = 180° - \angle KFC = 180° - 70° = 110°$.

Відповідь: 110°.

4. Декілька разів застосуємо нерівність між середніми:

$$\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2d}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{d+a}{2b}\right)^2 \geq \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{d^2} + \frac{cd}{a^2} + \frac{da}{b^2} \geq$$

$$\geq 2\frac{\sqrt{ab}}{c}\frac{\sqrt{ab}}{d} + 2\frac{\sqrt{cd}}{a}\frac{\sqrt{da}}{b} \geq 4\sqrt{\frac{\sqrt{ab}}{c}\frac{\sqrt{ab}}{d}\cdot\frac{\sqrt{cd}}{a}\frac{\sqrt{da}}{b}} = 4.$$

5. Нехай кольорами є білий і чорний, при цьому 9 має чорний колір.

Припустимо, що твердження невірне.

Для пари (1;2) можливі чотири варіанти розфарбування: (Б, Б), (Б, Ч), (Ч, Б), (Ч, Ч).

Розглядаючи кожний із них окремо, приходимо до протиріччя. Наприклад, для пари (Б, Ч) міркування виглядають так.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Б	Ч							Ч
1) Оскільки, 2+7=9, то	7	Б							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Б	Ч					Б		Ч
2) Оскільки, 1+7=8, то	8	Ч							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Б	Ч					Б	Ч	Ч
3) Оскільки, 1+6=7, то	6	Ч							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Б	Ч				Ч	Б	Ч	Ч

Протиріччя, оскільки 2+6=8.