Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді

ІІІ етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2022-2023 н.р.

8 клас

1. $(x-2020)(x-2021)(x-2022) = (x-2021)(x-2022)(x-2023)$.

$$(x-2020)(x-2021)(x-2022) - (x-2021)(x-2022)(x-2023)=0.$$

$$(x-2021)(x-2022)\,((x-2020)-(x-2023))=0.$$

$$((x-2021)(x-2022))\,(x-2020-x+2023))=0.$$

$$((x-2021)(x-2022))\,3=0.$$

$$x-2021=0 \text{ або } x-2022=0.$$

$$x = 2021 \text{ або } x = 2022.$$

Відповідь: $x = 2021$ або $x = 2022$.

2. Зауважимо, що коли збільшити швидкість кожного автомобіля на 10%, то швидкість зближення також збільшиться на 10%.

Нехай відстань між пунктами A і B дорівнює S, а швидкість зближення – V, тоді час руху до зустрічі дорівнює $\frac{S}{V}$. Якщо обидві швидкості збільшити на 10%, то час руху до зустрічі буде дорівнювати $\frac{S}{1{,}1V}$.

Таким чином, $\frac{S}{V}-\frac{S}{1{,}1V}=1$ год. Звідси, одержимо, що $\frac{S}{V}=11$ год.

Якщо обидві швидкості збільшити на 20%, то час руху до зустрічі буде дорівнювати $\frac{S}{1{,}2V}$ год, $\frac{S}{V}-\frac{S}{1{,}2V}=11-\frac{11}{1{,}2}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}$ год.

Відповідь: на $1\frac{5}{6}$ год.

3. Розглянемо ΔKCO: $\angle KCO = 90°$ (як кут між дотичною та радіусом, проведеним у точку дотику).

Оскільки $OK = 2OC$ ($OC = OP$ як радіуси), то $\angle OKC = 30°$, відповідно $\angle KOC = 60°$.

Аналогічно для ΔKCO.

ΔPOC – рівнобедрений із кутом при вершині $\angle POC = 180° - \angle KOC = 120°$, тому

$\angle OCP = \angle OPC = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30° = \angle OKC$. Отже, $DK \parallel PC$.

Аналогічно, $KC \parallel DP$ і $KDPC$ – паралелограм.

$KC = KD$ (як дотичні, проведені з однієї точки), то $KDPC$ – ромб.

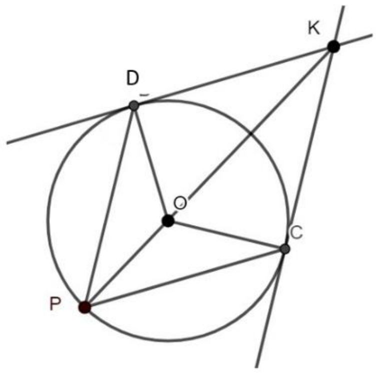

Рис. 1

4. Очевидно, що в кінці гри залишаться тільки шматки довжиною 2 і 3 см, при цьому П’ятачок виграє тоді і тільки тоді, коли їхня кількість парна (це означає, що була зроблена непарна кількість ходів, тому останнім ходив П’ятачок).

Є три можливі варіанти кінцевого положення:

$$15=3+3+3+3+3=3+3+3+2+2+2=3+2+2+2+2+2+2.$$

Звідси видно, що П’ятачку для перемоги достатньо гарантувати собі наявність двох шматків по 3 см і одного шматка на 2 см (це унеможливить перший і третій варіанти).

Тому на першому ході він розламує палицю на шматки 5 см і 10 см, перший з яких гарантовано рано чи пізно буде розламаний на 2 см і 3 см.

Якщо Вінні-Пух наступним ходом розламує палицю 10 см, П’ятачок має право відламати 3 см від більшого шматка, якщо ні - просто розламати 10 см на 3 см і 7 см. У такому разі, незалежно від подальших дій гравців, наприкінці гри будуть принаймні 2 шматки довжиною 3 см і 1 шматок довжиною 2 см, а отже, загальна кількість шматків буде рівна шести, що означатиме перемогу П’ятачка.

Відповідь. у П’ятачка.

5. За означенням цілої частини $2023 \le 2023x[x] < 2024$, $1 \le x[x] < \frac{2024}{2023}$, $1 \le x[x] < 1\frac{1}{2023}$.

Розглянемо для різних значень $[x]$.

1) $0 \le x < 1$, $[x] = 0$ і нерівність прийме вигляд $1 \le x \cdot 0 < \frac{2024}{2023}$, $1 \le 0 < \frac{2024}{2023}$, тобто $x \in \varnothing$;

2) $1 \le x < 2$, $[x] = 1$, $1 \le x \cdot 1 < \frac{2024}{2023}$ і $1 \le x < \frac{2024}{2023}$;

3) $n \le x < n + 1$, $n \in \mathrm{N}$, $n \ge 2$, $[x] = n$, нерівність запишеться у вигляді $1 \le x \cdot n < \frac{2024}{2023}$, $\frac{1}{n} \le x < \frac{2024}{2023n}$, а $\frac{2024}{2023n} < n$ для всіх розглядуваних n, тому $x \in \varnothing$;

4) $-1 \le x < 0$, $[x] = -1$, $1 \le x \cdot (-1) < \frac{2024}{2023}$, $-\frac{2024}{2023} < x \le -1$, $x = -1$;

5) $-n \le x < -(n + 1)$, $n \in \mathrm{N}$, $n \ge 2$, $[x] = -n$, $1 \le x \cdot (-n) < \frac{2024}{2023}$, $-\frac{2024}{2023n} < x < -\frac{1}{n}$, як і раніше $x \in \varnothing$; $-\frac{2024}{2023n} > -n$ для всіх розглядуваних n, тому $x \in \varnothing$.

Відповідь: $x \in \{-1\} \cup [1; 2)$.