

$$1. \frac{x-2022}{x-2023} = \frac{x-2023}{x-2022}.$$

$$(x-2022)^2 = (x-2023)^2 \Leftrightarrow |x-2022| = |x-2023| \Leftrightarrow x = \frac{4045}{2} = 2022,5$$

Відповідь: $x = 2022,5$.

2. Нехай А, Б, В, Г, Д – площі ділянок кожного брата відповідно. Тоді за умовою, $\frac{1}{10}A = \frac{1}{15}B = \frac{1}{20}C = \frac{1}{25}D = \frac{1}{30}E$ (*).

Позначимо, $A=x$, знайдемо $B=1,5x$, $C=2x$, $D=2,5x$, $E=3x$.

Отже, спільна площа їх ділянок була $10x$, збільшилася на $\frac{1}{10}x=0,1x$ у кожного, тобто на $0,5x$ сумарно.

Загальна площа земельної ділянки братів збільшилася $\frac{0,5x}{10x} \cdot 100\% = 5\%$

Відповідь: на 5%

3. Нехай T – середина відрізка AP , тоді TQ – середня лінія $\triangle APC$, отже $TQ=PC/2=PQ$.

Звідси $\triangle PQT$ – рівнобедрений, його медіана QH перпендикулярна AB .

Оскільки $AT=PB$, точка H буде серединою не тільки відрізка TP , але і AB .

Отже, QH – середня лінія $\triangle ABC$ і $QH \parallel CB$.

Тоді CB перпендикулярно AB .

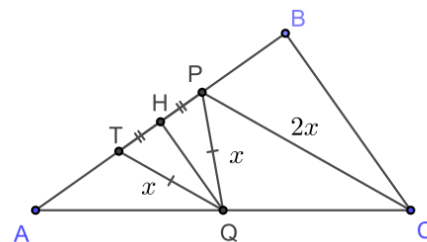


Рис. 1

4. Пронумеруємо клітинки (рис. 2). Клітинки з однаковими номерами утворюють пари.

Другому гравцеві для перемоги досить кожного разу зафарбовувати клітинку з тої пари, клітинку з якої за останнім своїм ходом зафарбував гравець, що розпочав гру.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

Рис. 2

Дотримуючись такої стратегії гри, другий гравець лише повторюватиме на одній з половин таблиці конфігурацію зафарбованих кліток, яка утворюється після ходу першого гравця.

Тому зафарбований квадрат 2×2 уперше з'явиться після ходу гравця, що почав гру.

5. Пофарбуємо у синій колір дуги, центральні симетричні відносно центру кола жовтим дугам (можливо, деякі точки кола будуть пофарбовані в жовтий і синій кольори одночасно). При цьому сума довжин пофарбованих дуг менша за довжину кола. Тому на колі знайдеться незафарбована точка.

Центральна симетрична їй відносно центра кола точка також буде незафарбована. Діаметр, що проходить через ці точки, шуканий.