Сумський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти

Відповіді

III етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2022-2023 н.р.

11 клас

1. Нехай спочатку було x учасників, тоді через рік їх стало ($x+n$), а через два роки – ($x+n+300$). За перший рік кількість учасників збільшилась на $\frac{n}{x}\cdot 100\%$, а за другий рік – на $\frac{300}{x+n}\cdot 100\%$.

Маємо рівняння $\frac{n}{x}\cdot 100=300$ і $\frac{300}{x+n}\cdot 100=n$.

З першого рівняння $n=3x$, тоді $\frac{300}{x+n}\cdot 100=3x$, звідки $x=50$.

Учасників стане 50+150+300=500 чоловік.

Відповідь: 500.

2. Оскільки $\frac{2023}{2^{2023}}=\frac{2023}{2^{2023}}\cdot\frac{5^{2023}}{5^{2023}}$, то нам треба просто знайти четверту з кінця цифру числа $2023\cdot 5^{2023}$.

Дослідимо періодичність останніх чотирьох цифр числа $2023\cdot 5^{n}$.

$2023\cdot 5^1=1\underline{0115}$, $2023\cdot 5^2=5\underline{0575}$, $2023\cdot 5^3=25\underline{2875}$, $2023\cdot 5^4=126\underline{4375}$, $2023\cdot 5^5=632\underline{1875}$, $2023\cdot 5^6=3160\underline{9375}$, $2023\cdot 5^7=\ldots 6875$, $2023\cdot 5^8=\ldots 4375$.

Як бачимо, далі все повторюється періодично.

Таким чином $2023\cdot 5^{2020}=\ldots 4375$, $2023\cdot 5^{2023}=\ldots 6875$, тому шукана цифра – 6.

Відповідь: 6.

3. Відкладемо на промені BM точку F таку, що $BM = FM$ (рис. 1).

Тоді чотирикутник $ABCF$ є паралелограмом, оскільки його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

Звідси $CF = AB$ та $CF \parallel AB$.

Оскільки $BF \parallel EC$ та $DE \parallel AB \parallel CF$, то чотирикутник $DECF$ – паралелограм, звідки

$CF = DE$.

Отже, $AB = CF = DE$ і $AB \parallel CF \parallel DE$, тому чотирикутник $ABED$ – паралелограм, $AD = BE$.

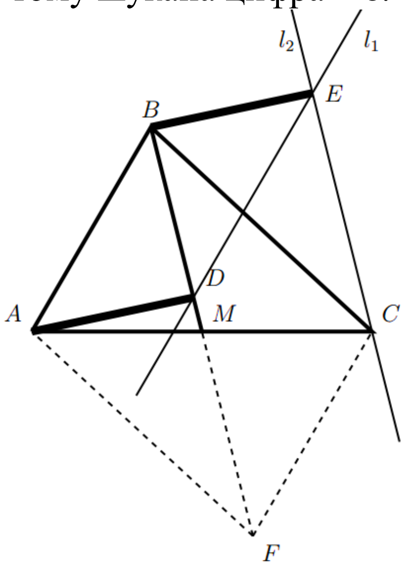

Рис. 1

4. Оскільки сторони $2n$-кутника рівні, то досить довести, що рівні суми відстаней до червоних та до синіх сторін. Для квадрата це очевидно.

При $n>3$ продовжимо червоні сторони $2n$-кутника до їх взаємних перетинів.

У результаті одержимо правильний n-кутник.

Якщо S – його площа, b – довжина сторони, то сума відстаней від точки O до його сторін дорівнює $\frac{2S}{b}$. Аналогічно встановлюємо, що й сума відстаней від точки O до синіх сторін дорівнює $\frac{2S}{b}$.

5. Оскільки $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, то $x^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 1$.

Таким чином тепер розглянемо такі випадки.

$n = 3k$:

$$x^{2n} + x^n + 1 = (x^3)^{2k} - 1 + (x^3)^k - 1 + 3 = P(x)(x^2 + x + 1) + 3$$

не може ділиться на $x^2 + x + 1$.

$n = 3k + 1$:

$$x^{2n} + x^n + 1 = (x^3)^{2k}x^2 + (x^3)^k x + 1 = ((x^3)^{2k} - 1)x^2 + x^2 + ((x^3)^k - 1)x + x + 1$$

ділиться на $x^2 + x + 1$.

$n = 3k + 2$:

$x^{2n} + x^n + 1 = (x^3)^{2k}x^4 + (x^3)^k x^2 + 1 = ((x^3)^{2k} - 1)x^4 + x^4 + ((x^3)^k - 1)x^2 + x^2 + 1$

ділиться на $x^2 + x + 1$, оскільки $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Таким чином, умову задовольняють $n \neq 3k$.

Оскільки чисел, що кратні 3 та не перевищують 2023 рівно 2022 : 3 = 674, то шукана кількість 2023 – 674 = 1349.

Відповідь: 1349.