Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 рік

«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»
Конфуцій

<u>10 клас (середній рівень)</u>

1. Чи існує квадратний тричлен ax^2+bx+c з цілими непарними коефіцієнтами a, b, c, який має одним з коренів число $\frac{1}{2022}$?

2. Задані $2n$ попарно різних натуральних чисел. Яку найбільшу кількість пар з цих чисел можна гарантовано вибрати так, щоб кожне число було не більше ніж в одній парі, і в кожній парі сума чисел була складеним числом?

3. Нехай P – точка перетину діагоналей вписаного чотирикутника $ABCD$. Описані кола ΔAPD та ΔBPC перетинають пряму AB у точках E та F відповідно. Q та R – проекції точки P на прямі FC та DE. Доведіть, що $AB||QR$.

4. Для довільних невід'ємних чисел x та y доведіть нерівність:
$$x^2y^2+x^2y+xy^2 \leq x^4y+x+y^4.$$

5. У лівій-нижній кутовій клітинці 1×1 дошки 2022×2023 стоїть чорна фішка, а в лівій-верхній та правій-нижній клітинках стоять білі фішки. Петрик за один хід двічі поспіль пересуває чорну фішку у сусідню по стороні клітинку, а Василь може або одну з білих фішок двічі поспіль пересунути на сусідню по стороні клітинку, або кожну з двох білих фішок окремо пересунути на сусідню за стороною клітинку. Фішки не можна ставити на поля, в яких вже побувала фішка іншого кольору. Василь перемагає, якщо у певний момент через скінченну кількість ходів обидві білі фішки опиняться в одній клітинці. Доведіть, що при правильній грі Петрика Василь перемогти не зможе.

23 січня 2022 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 рік

«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»
Конфуцій

<u>10 клас (середній рівень)</u>

1. Чи існує квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ з цілими непарними коефіцієнтами a, b, c, який має одним з коренів число $\frac{1}{2022}$?

2. Задані $2n$ попарно різних натуральних чисел. Яку найбільшу кількість пар з цих чисел можна гарантовано вибрати так, щоб кожне число було не більше ніж в одній парі, і в кожній парі сума чисел була складеним числом?

3. Нехай P – точка перетину діагоналей вписаного чотирикутника $ABCD$. Описані кола ΔAPD та ΔBPC перетинають пряму AB у точках E та F відповідно. Q та R – проекції точки P на прямі FC та DE. Доведіть, що $AB||QR$.

4. Для довільних невід'ємних чисел x та y доведіть нерівність:
$$x^2y^2 + x^2y + xy^2 \leq x^4y + x + y^4.$$

5. У лівій-нижній кутовій клітинці 1×1 дошки 2022×2023 стоїть чорна фішка, а в лівій-верхній та правій-нижній клітинках стоять білі фішки. Петрик за один хід двічі поспіль пересуває чорну фішку у сусідню по стороні клітинку, а Василь може або одну з білих фішок двічі поспіль пересунути на сусідню по стороні клітинку, або кожну з двох білих фішок окремо пересунути на сусідню за стороною клітинку. Фішки не можна ставити на поля, в яких вже побувала фішка іншого кольору. Василь перемагає, якщо у певний момент через скінченну кількість ходів обидві білі фішки опиняться в одній клітинці. Доведіть, що при правильній грі Петрика Василь перемогти не зможе.

23 січня 2022 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів