Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 рік

*«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»*
Конфуцій

9 клас (високий рівень)

1. Яке найменше значення може приймати вираз
$$\frac{(x+y+|x-y|)^2}{xy}$$
для додатних змінних x, y?

2. Для довільних чисел x, y доведіть нерівність
$$\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}+20.$$

3. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC. Коло з центром в точці B та радіусом BL перетинає промінь AL в точці E, а коло з центром в точці C та радіусом CL перетинає промінь AL в точці D (точки E та D відмінні від точки L). Доведіть, що $AL^2 = AE \cdot AD$.

4. Назвемо натуральне число вільним від квадратів, якщо воно не ділиться на p^2 для жодного простого числа p. Дано число $n > 1$, що вільне від квадратів і має d натуральних дільників. Яку найбільшу кількість дільників цього числа можна обрати так, щоб для будь-яких двох з цих обраних, наприклад, a і b, число $a^2 + ab - n$ не було квадратом цілого числа?

5. У турнірі з підводного поло взяли участь $n \geq 2$ команди, і кожні дві команди зіграли між собою рівно один матч. Кожній команді за перемогу, нічию та поразку нараховували відповідно 2, 1 та 0 очок. Виявилось, що жодні дві команди не набрали однакову кількість очок. У підсумковій таблиці команди розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Під час перегляду регламенту виявилось, що кожний матч, в якому був переможець, мав закінчитись унічию, і навпаки, у кожному матчі, що закінчився внічию, мав бути переможець. При цьому виявилось, що знову жодні дві команди не набрали однакову кількість очок, і у підсумковій таблиці їх знову розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Для яких n могло статися так, що новий порядок команд протилежний початковому?

23 січня 2022 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Завдання III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2021-2022 рік

*«Не важливо з якою швидкістю ти рухаєшся до своєї мети,
головне – не зупинятися»*
Конфуцій

9 клас (високий рівень)

1. Яке найменше значення може приймати вираз
$$\frac{(x+y+|x-y|)^2}{xy}$$
для додатних змінних x, y?

2. Для довільних чисел x, y доведіть нерівність
$$\sqrt{(x+4)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{(x-2)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2}+20.$$

3. Нехай AL – бісектриса трикутника ABC. Коло з центром в точці B та радіусом BL перетинає промінь AL в точці E, а коло з центром в точці C та радіусом CL перетинає промінь AL в точці D (точки E та D відмінні від точки L). Доведіть, що $AL^2 = AE \cdot AD$.

4. Назвемо натуральне число вільним від квадратів, якщо воно не ділиться на p^2 для жодного простого числа p. Дано число $n > 1$, що вільне від квадратів і має d натуральних дільників. Яку найбільшу кількість дільників цього числа можна обрати так, щоб для будь-яких двох з цих обраних, наприклад, a і b, число $a^2 + ab - n$ не було квадратом цілого числа?

5. У турнірі з підводного поло взяли участь $n \geq 2$ команди, і кожні дві команди зіграли між собою рівно один матч. Кожній команді за перемогу, нічию та поразку нараховували відповідно 2, 1 та 0 очок. Виявилось, що жодні дві команди не набрали однакову кількість очок. У підсумковій таблиці команди розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Під час перегляду регламенту виявилось, що кожний матч, в якому був переможець, мав закінчитись унічию, і навпаки, у кожному матчі, що закінчився внічию, мав бути переможець. При цьому виявилось, що знову жодні дві команди не набрали однакову кількість очок, і у підсумковій таблиці їх знову розташували в порядку спадання кількості набраних очок. Для яких n могло статися так, що новий порядок команд протилежний початковому?

23 січня 2022 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів