

Задачі на дослідження

Біда Світлана Володимирівна, класична гімназія Сумської міської ради

З метою розвитку творчих здібностей у процесі навчання математики доцільно використовувати задачі на дослідження, які дають можливість учням спостерігати та виділяти закономірності, розрізняти істотні й неістотні ознаки, експериментувати.

Процес розв'язування задач на дослідження сприяє активізації пізнавальної діяльності учнів, створює умови для саморозвитку та творчого самовдосконалення.

Математика (5-6 клас)

1. У зошиті в клітинку намалюйте прямокутник, площа якого дорівнює 32 клітинкам (вершини прямокутника повинні лежати в вершинах клітинок).

З'ясуйте, скільки може бути таких прямокутників?

Дослідіть, для яких площ може бути тільки один прямокутник.

Для яких – два різних прямокутника, три різних прямокутника?

З'ясуйте, як залежить кількість варіантів від площі.

Знайдіть з усіх прямокутників з однаковою площею той, у якого периметр найменший.

2. У зошиті в клітинку побудуйте квадрати з вершинами у вузлах клітинок, знайдіть їх площі (наприклад, рис. 4).

Дослідіть, квадрати якої площі можна так побудувати, а якої – неможливо.

Ці площі знайти легко: це квадрати довжин їх сторін, а сторони дорівнюють цілому числу клітинок.

Площі прямих квадратів – це квадрати цілих чисел: 1, 4, 9, 16, 25, ... , 100.

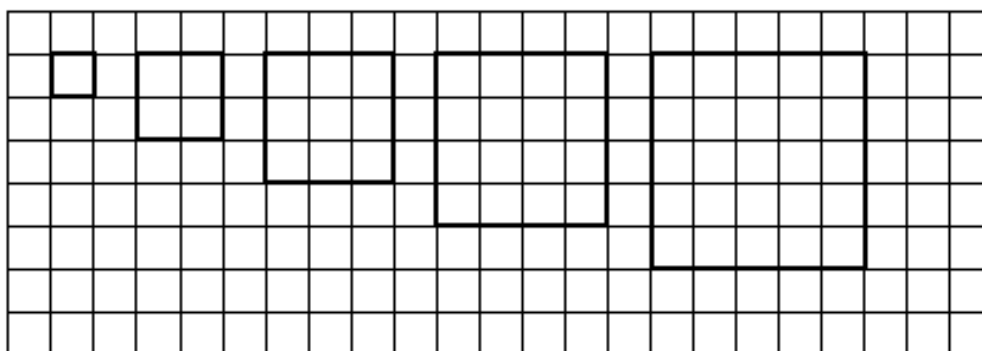


Рис. 4

Побудуйте квадрати, сторони яких є діагоналями 2, 3, 4 клітинок («похилі» квадрати).

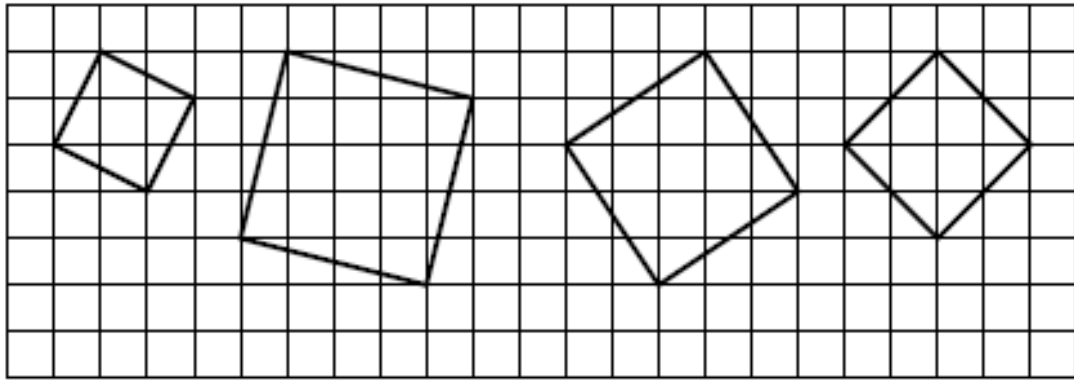


Рис. 5

З'ясуйте, як знайти площу похилого квадрата? (підказка – рис. 6, рис. 7).

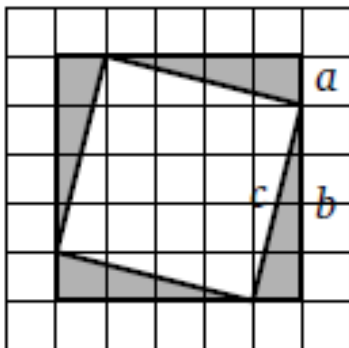


Рис. 6

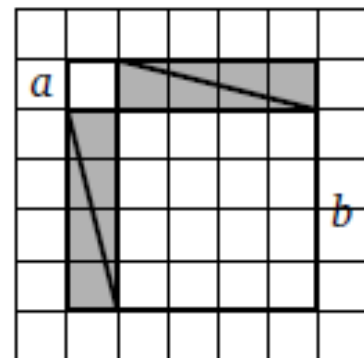


Рис. 7

Дослідіть, якими числами може виражатися площа «похилого» квадрата з вершинами в вузлах клітинок?

Алгебра (7-9 клас)

Давні єгиптяни використовували звичайні дроби з чисельником 1 – аліквоти. Усі інші дроби виражали через суми аліквот. Зберігся папірус Ахмеса, у якому дроби виду $\frac{2}{2n+1}$ подано у вигляді суми двох, трьох або чотирьох аліквот.

Наприклад, $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}$ або $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+1)}$.

З'ясуйте, чи кожен дріб виду $\frac{2}{2n+1}$ можна подати у вигляді суми двох аліквот?

Розгляньте всі можливі випадки.

Дослідіть кількість розв'язків для кожного випадку (для n від 1 до 10).

Геометрія (7-9 клас)

На колі відмічено 12 точок на однаковій відстані одна від одної (як на циферблаті годинника). Одна з точок – стартова, її з'єднують відрізком з точкою, яка знаходиться від неї на відстані d дуг за годинниковою стрілкою (якщо $d=1$, то беремо сусідню точку), потім цю точку з'єднуємо з наступною через d дуг і т.д. ($d < 12$). Цей процес продовжуємо, доки остання точка не співпаде зі стартовою, при цьому отримуємо замкнену ламану.

1. З'ясуйте, для яких значень d можна отримати квадрат, трикутник, відрізок?

2. Дослідіть, для яких значень d усі 12 точок будуть вершинами ламаної? (наприклад, при $d=1$ – будуть, а при $d=2$ – ні).

3. З'ясуйте, скільки обертів виконує ламана, щоб стати замкненою? (при $d=1$ – одне обертання).

4. Дослідіть пункти 1-3 для 11 точок, 10 точок, 9 точок.

Сформулюйте твердження, яке узагальнює цю задачу.

З'ясуйте, чи можна отримати в результаті ламані, що співпадають?

У яких випадках це відбувається?

Як зміняться результати пунктів 1-4 з урахуванням цього випадку?

Лабораторна робота №1

Знайдіть періоди послідовності $a_n \equiv n^m \pmod{k}$.

Перебіг роботи

1. Випишіть остачі від ділення квадратів ($m = 2$) на числа $k = 2, 3, 4, \dots, 9$. Знайдіть для кожного випадку періоди.

2. Доведіть, що довжина періоду (будь-якого, не обов'язково найменшого) дорівнює k .

3. З'ясуйте, як пов'язані довжина періоду й довжина найменшого періоду (для довільної періодичної послідовності)?

4. З'ясуйте, у яких випадках у нашій таблиці найменший період дорівнює k , а в яких менше? Сформулюйте й доведіть закономірність.

5. Випишіть остачі від ділення кубів ($m = 3$) на числа $k = 2, 3, 4, \dots, 9$. Знайдіть для кожного випадку періоди. З'ясуйте, у яких випадках найменший період дорівнює k , а в яких менше? Сформулюйте й доведіть закономірність.

6. Перевірте аналогічну гіпотезу для m степенів, m – просте число.

7. Дослідіть ситуацію у випадку, коли k – просте число.

8. Дослідіть ситуацію у випадку, коли m і k – взаємно-прості числа.

9. Дослідіть ситуацію у випадку, коли m або k – добуток різних простих чисел.

Лабораторна робота №2

Знайдіть періоди послідовностей $b_n \equiv \varphi_n \pmod{k}$, де φ_n – числа Фібоначчі.

Перебіг роботи

1. Випишіть остачі від ділення послідовності Фібоначчі на $k = 2, 3, 4, \dots$ (вручну або за допомогою комп'ютера). Що ви помічаєте?
2. З'ясуйте, чи може послідовність остач бути неперіодичною?
Оцініть довжину періоду з теоретичних міркувань.
3. Доведіть, що будь-які два сусідніх члена послідовності Фібоначчі (a_n) повністю визначають всю послідовність (тобто можна обчислювати члени не тільки вправо, але й вліво від цих двох членів).
4. З'ясуйте, чи може послідовність остач починати свій перший період не з членів a_0 і a_1 , а пізніше?
5. З'ясуйте, скільки чисел Фібоначчі діляться на 2? На 3? На k ?
6. Знайдіть найбільший спільний дільник чисел a_{99} і a_{100} . Узагальніть.
7. З'ясуйте, якими двома числами починається перший період?
Яким числом він закінчується?
8. З'ясуйте, яке перше число Фібоначчі ділиться на дане k ?
Позначимо через t номер другого числа, що ділиться на k .
Знайдіть номер третього такого числа.
9. Нехай r – остача від ділення a_{m-1} на k . Тоді остачі від ділення чисел Фібоначчі на k виглядають як:
 $0, 1, 1, 2, 3, \dots, r \pmod{k}$,
 $0, r, r, 2r, 3r, \dots, r^2 \pmod{k}$.
Перевірте та продовжте послідовність.
З'ясуйте, після якого рядка почнеться повторення?
10. Доведіть, що знайдеться таке p , що $a^p_{m-1} \equiv 1 \pmod{k}$.
11. Сформулюйте теорему, яку ви довели: «Період послідовності остач, які утворюються при діленні чисел Фібоначчі на $k > 1$, дорівнює...»
12. Дослідіть експериментально, скільки рядків може бути в одному періоді (в таблиці з п. 9).
Спробуйте довести.
13. Для подальших просувань можна використовувати аналог формули Біне (якщо в полі F_k добувається корінь із k , то розв'язання спрощується).