Задачі з параметрами

Лапіна С.М., Шосткінський навчально-виховний комплекс: спеціалізована школа I-II ступенів – ліцей Шосткінської міської ради

Теоретичні наукові дослідження в різних сферах життя, вивчення численних фізичних процесів і геометричних закономірностей часто приводить за допомогою математичного моделювання до складних рівнянь, нерівностей, їх систем, які містять параметри. Задачі з параметрами – прототип важливих науково-дослідницьких задач, є дуже складними й потребують нестандартного підходу до розв'язання.

У процесі розв'язування задач з параметрами формуються:

- уміння міркувати логічно та доказово;
- логічні прийоми мислення (аналіз, синтез, порівняння, конкретизація, узагальнення);
- творчі здібності.

Розв'язування задач з параметрами потребує знань властивостей елементарних функцій (область визначення, множина значень, проміжки зростання та спадання), властивостей рівнянь (рівносильність та нерівносильність перетворень), умінь проводити дослідження.

Крім того, для застосування графічних методів необхідні вміння виконувати побудову графіків функцій та проводити графічні дослідження, що відповідають різним значенням параметра.

Пропонуємо приклади використання рівносильних перетворень при розв'язуванні рівнянь з параметрами.

Приклад 1. При яких значеннях параметра a рівняння $(\sqrt{x}-a)(3x^2+x-2)=0$ має єдиний розв'язок ?

Знаходимо область допустимих значень: ОДЗ: $x \geq 0$.

Добуток дорівнює нулю, отже, хоча б один із множників, що містять змінну, дорівнює нулю, тому маємо сукупність: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}-a=0,\\ 3x^2+x-2=0.\end{array}\right.$

Знаходимо корені другого рівняння, маємо: $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-1$.

Останній розв'язок не належить ОДЗ, тому маємо сукупність з двох рівнянь $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=a,\\ x=\frac{2}{3}.\end{array}\right.$

Для того, щоб рівняння мало один розв'язок, потрібно, щоб корені рівнянь або співпали, або перше рівняння не мало розв'язків.

1) $a \geq 0$, $x = \frac{2}{3} \to \sqrt{\frac{2}{3}} = a$.

2) $a < 0, x \in \varnothing$.

Відповідь: при $a < 0$ та $\sqrt{\frac{2}{3}} = a$ рівняння має один корінь.

Приклад 2. Знайти значення параметра a, при яких сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 - 5a)\,x + 5a - 1 = 0$ дорівнює -6.

Використаємо теорему Вієта та врахуємо умову $x_{1+}\,x_2 = -6$.

Маємо систему: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6, \\ x_1 + x_2 = a^2 - 5a, \\ x_1 \cdot x_2 = 5a - 1. \end{cases}$

Звідси маємо, $a^2 - 5a = -6$;

$a^2 - 5a + 6 = 0$;

Розв'язуємо квадратне рівняння, маємо: $D=25-24=1$, $a_1=3$, $a_2=2$.

Звідси маємо два випадки:

1) $a=3$,

$x^2 - (9 - 15)\,x + 15 - 1 = 0$,

$x^2 - 6\,x + 14 = 0$,

$D=36-56= -20$ – розв'язків немає.

2) $a=2$,

$x^2 - (4 - 10)\,x + 10 - 1 = 0$,

$x^2 + 6\,x + 9 = 0$, $D=36-36= 0$, $x=-3$.

Відповідь: при $a=2$.

Приклад 3. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\frac{x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1}{x + 1} = 0$$

має єдиний розв'язок?

Знайдемо область допустимих значень – ОДЗ: $x \neq -1$.

Дріб дорівнює нулю , коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, отже: $x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1 = 0$.

1) Рівняння має єдиний розв'язок, якщо дискримінант дорівнює нулю й корінь належить ОДЗ.

$D = 9a^2 - 4(2a^2 + a - 1) = 9a^2 - 8a^2 - 4a + 4 = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$

Знайдемо корінь при $a=2$. Корінь належить ОДЗ.

2) Рівняння має єдиний розв'язок, якщо дискримінант більше нуля та один з коренів дорівнює -1, тобто не належить ОДЗ.

$D \geq 0$, $D = (a - 2)^2$, $x_1 = -1$.

$(-1)^2 + 3a + 2a^2 + a - 1 = 0$,

$2a^2+4a=0$,

$a(a+2)=0$,

$a=0$, $a=-2$.

Перевірка: $a=0$,

$x^2-1=0$,

$x^2=1$,

$x=\pm 1$.

Значення -1 не належить ОДЗ, отже, $x=1$.

$a=-2$

$x^2+6x+8-2-1=0$,

$x^2+6x+5=0$.

$D=36-20=16$, $x_1=-1$ не належить ОДЗ, $x_2=-5$.

Відповідь: при $a=\pm 2$, при $a=0$.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} ax+y=2, \\ 9x+ay=6. \end{cases}$ має безліч розв'язків?

Система лінійних рівнянь з двома змінними має вигляд: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$

Графіками кожного з рівнянь є пряма, тому можливі три варіанти розміщення двох прямих на площині, а отже, розв'язків системи рівнянь.

Графічно це дуже вдало демонструється на рухливих рисунках, які побудовано в програмі GeoGebra (http://www.geogebra.org) .

1. Єдиний розв'язок: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ – прямі перетинаються (рис. 1).

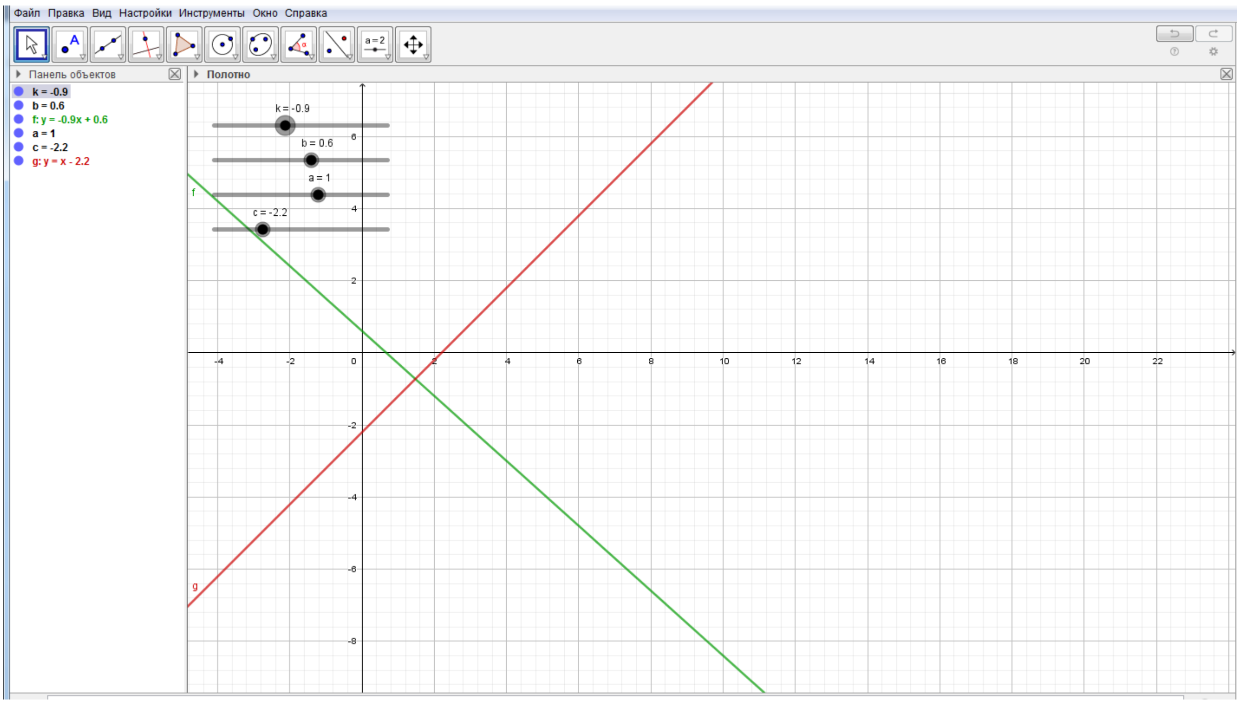

Рис. 1

2. Безліч розв'язків $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ – прямі співпадають (рис.2).

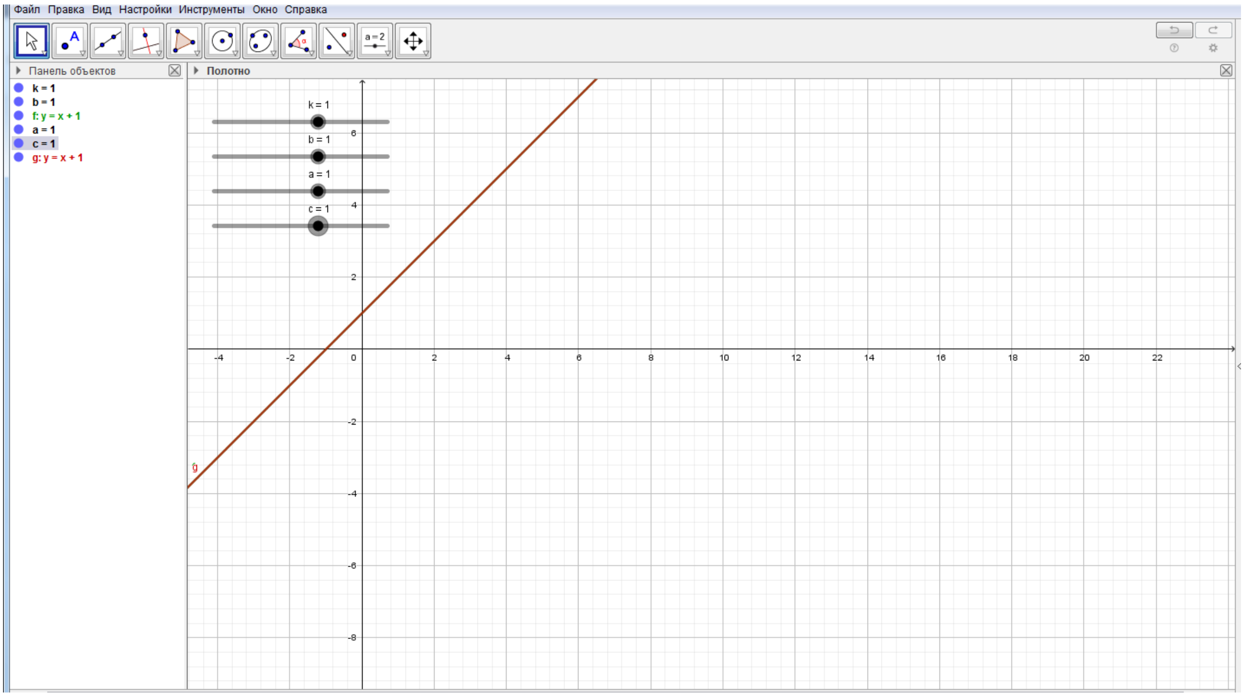

Рис. 2

3. Жодного розв'язку: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ – прямі паралельні (рис. 3).

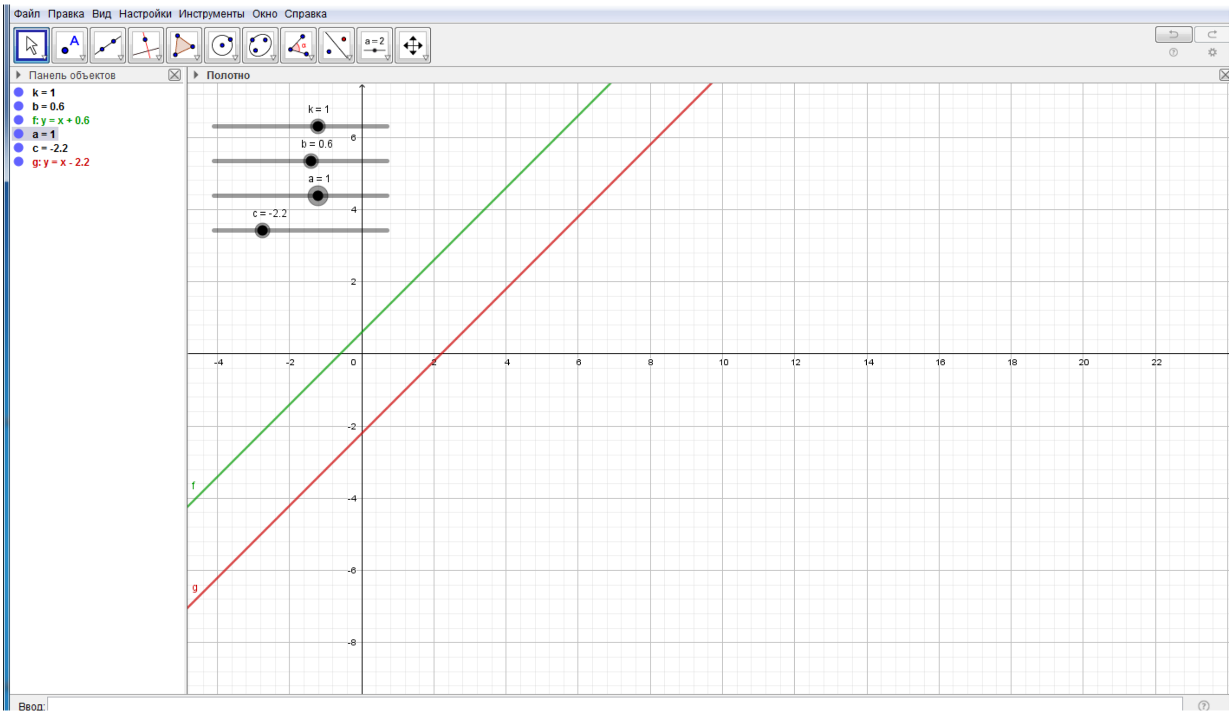

Рис. 3

Система рівнянь має безліч розв'язків, якщо $\frac{a}{9}=\frac{1}{a}=\frac{2}{6}$, $\frac{a}{9}=\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$, a=3.

Відповідь: при a=3 система рівнянь має безліч розв'язків.

Приклад 5. Знайдіть усі дійсні значення a, для яких система рівнянь $\begin{cases}(y-x)(x-a)=0,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$

має рівно три розв'язки.

Перше рівняння системи розпадається на сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} y-x=0,\\ x-a=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=x,\\ x=a\end{array}\right.$$

Будуємо графіки рівнянь (рис. 4).

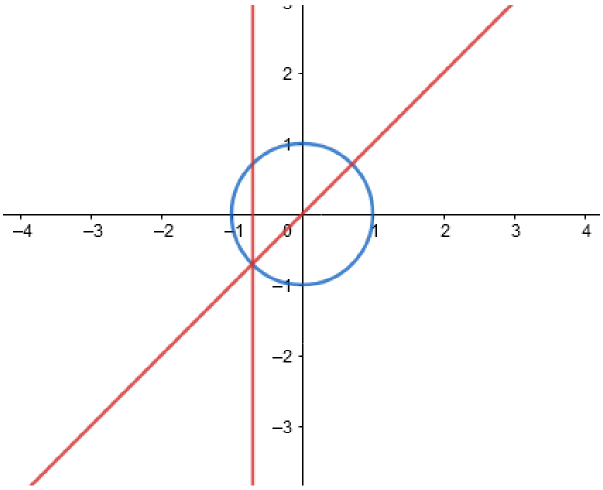

Рис. 4

Відповідь: $a=\pm1,\ a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Система динамічної математики GeoGebra дозволяє здійснювати:

– побудову графіків функцій і рівнянь, заданих аналітично;

– графічне розв'язування рівнянь і їх систем;

– знаходження координат точок перетину графіків двох функцій на заданому проміжку;

– графічне розв'язування нерівностей та їх систем;

– побудова дотичної і нормалі до графіка функції у заданій точці з одночасним знаходженням їх рівнянь;

– дослідження функції на даному проміжку.